A WEAK CONVERGENCE ALGORITHM FOR VARIATIONAL INEQUALITY IN HILBERT SPACES

Dong Xuan Hung[1], Nguyen Thi Tam[2*]
[1]Ngo Quyen-Dong Anh High School, Ha Noi, [2]TNU - University of Sciences

ARTICLE INFO

Received:	**29/12/2024**
Revised:	**19/02/2025**
Published:	**19/02/2025**

KEYWORDS

Variational inequality
Pseudo-monotone operator
Hilbert space
Metric projection
Algorithm

ABSTRACT

Variational inequalities are an important topic in general nonlinear analysis and in optimization theory in particular. Many practical nonlinear analysis and optimization theory problems can be modelled using variational inequalities. In present, the topic of variational inequalities is receiving the attention of many scientists in the world. In the country, there are only a few scientists studying monotone or pseudo-monotone variational inequalities. This paper studies variational inequalities with pseudo-monotone (possibly non-Lipschitz) mappings in real Hilbert spaces. We proposed a self-adaptive algorithm to approximate solutions for the class of variational inequality problems with monotone pseudo-valued mappings (possibly non-Lipschitz) in real Hilbert spaces based on the line-search rule and the extragradient algorithm. The weak convergence of this algorithm was established based on some mild conditions on the control parameters. Therefore, the algorithm proposed in this study can effectively apply to monotone or pseudo-monotone variational inequalities in real Hilbert spaces. The algorithm which was found in this study can also be applied to variational inequality problems in other spaces.

MỘT THUẬT TOÁN HỘI TỤ YẾU CHO BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRÊN KHÔNG GIAN HILBERT

Đồng Xuân Hưng[1], Nguyễn Thị Tâm[2*]
[1]Trường THPT Ngô Quyền-Đông Anh, Hà Nội, [2]Trường Đại học Khoa học – ĐH Thái Nguyên

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận bài:	**29/12/2024**
Ngày hoàn thiện:	**19/02/2025**
Ngày đăng:	**19/02/2025**

TỪ KHÓA

Bất đẳng thức biến phân
Toán tử giả đơn điệu
Không gian Hilbert
Phép chiếu mêtric
Thuật toán

TÓM TẮT

Bất đẳng thức biến phân là một chủ đề quan trọng trong giải tích phi tuyến nói chung và trong lý thuyết tối ưu nói riêng. Nhiều bài toán giải tích phi tuyến và lý thuyết tối ưu trong thực tiễn có thể được mô hình ở dạng bất đẳng thức biến phân. Hiện nay, chủ đề bất đẳng thức biến phân đang nhận được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trên thế giới và trong nước. Bài báo này nghiên cứu bất đẳng thức biến phân với ánh xạ giá giả đơn điệu (có thể không Lipschitz) trong không gian Hilbert thực. Chúng tôi đề xuất một thuật toán tự thích nghi để xấp xỉ nghiệm cho lớp bài toán này dựa trên thuật toán tìm kiếm theo tia và thuật toán chiếu tăng cường. Sự hội tụ yếu của thuật toán này được thiết lập dựa trên một số điều kiện nhẹ đặt lên các tham số điều khiển. Do đó, thuật toán được đề xuất trong nghiên cứu này có thể áp dụng hiệu quả cho các bất đẳng thức biến phân đơn điệu hoặc giả đơn điệu trong không gian Hilbet thực và trong các không gian khác.

DOI: https://doi.org/10.34238/tnu-jst.11781

[*] Corresponding author. *Email: nguyentam101294@gmail.com*

1. Giới thiệu

Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert thực, $C \subseteq \mathcal{H}$ là một tập con lồi, đóng, khác rỗng và $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là một toán tử phi tuyến. Khi đó bất đẳng thức biến phân tương ứng với toán tử giá $\mathcal{F}$ và tập ràng buộc C được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm một phần tử } u^* \in \Omega := VI(C, \mathcal{F}), \tag{1}$$

trong đó $VI(C, \mathcal{F}) = \{u \in C : \langle \mathcal{F}(u), v - u\rangle \geq 0,\ \forall v \in C\}$.

Nhiều bài toán trong nghiên cứu tác nghiệp và vật lý toán học có thể được viết dưới dạng bất đẳng thức biến phân [1]-[5]. Việc giải các bất đẳng thức này là một lĩnh vực đang phát triển mạnh mẽ trong giải tích phi tuyến. Đến nay, nhiều phương pháp đã được đề xuất, đặc biệt là các phương pháp dạng chiếu (sử dụng phép chiếu mêtric trên tập chấp nhận được). Trong các bài toán tìm điểm yên ngựa hoặc cân bằng Nash, để phương pháp chiếu đơn giản nhất (tương tự như phương pháp chiếu gradient) hội tụ, điều kiện đơn điệu mạnh phải được thỏa mãn. Nếu điều kiện này không thỏa mãn, một số cách tiếp cận khác có thể được áp dụng. Một trong số đó là điều chỉnh bài toán gốc để đạt được tính chất yêu cầu. Sự hội tụ mà không cần điều chỉnh bài toán được cung cấp trong các phương pháp gradient tăng cường lần đầu tiên được đề xuất bởi Korpelevich trong [6]-[9]. Một nhược điểm rõ ràng của thuật toán, hạn chế việc sử dụng rộng rãi của nó, là hằng số Lipschitz của toán tử phải được biết hoặc có thể ước lượng một cách đơn giản. Hơn nữa, trong nhiều bài toán, các toán tử có thể không thỏa mãn điều kiện Lipschitz. Do đó, một trong những hướng nghiên cứu gần đây cho bất đẳng thức biến phân là xây dựng các thuật toán mới không phụ thuộc vào giá trị Lipschitz của ánh xạ giá hay tổng quát hơn là khi các ánh xạ giá không thỏa mãn điều kiện Lipschitz, đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước(xem [6]-[9]).

Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất một biến thể của thuật toán gradient tăng cường với bước điều chỉnh động cho các bài toán bất đẳng thức biến phân với toán tử giá giả đơn điệu (có thể không Lipschitz). Chúng tôi chứng minh tính hội tụ yếu của thuật toán đề xuất dựa trên một số điều kiện nhẹ đặt lên các tham số điều khiển.

2. Cơ sở lý thuyết và các bổ đề nền tảng

Ta sử dụng các ký hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\| \cdot \|$, $\to$ và $\rightharpoonup$ để ký hiệu tích vô hướng, chuẩn, sự hội tụ mạnh và hội tụ yếu trên không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$.

Ta biết rằng với mỗi $u \in \mathcal{H}$, tồn tại duy nhất một phần tử $w \in C$ sao cho

$$\|u - w\| = \min_{v \in C} \|u - v\|. \tag{2}$$

Như vậy ta được một ánh xạ $\mathrm{Proj}_C : \mathcal{H} \to C$ được xác định bởi $\mathrm{Proj}_C(u) = w$. Ánh xạ Proj_C được gọi là phép chiếu mêtric từ $\mathcal{H}$ lên C.

Định nghĩa 2.1. Một toán tử $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ được gọi là

(i) giả đơn điệu nếu

$$\langle \mathcal{F}(v), u - v\rangle \geq 0 \text{ suy ra } \langle \mathcal{F}(u), u - v\rangle \geq 0$$

với mọi $u, v \in \mathcal{H}$;

(ii) liên tục yếu theo dãy nếu với mọi dãy $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$ thỏa mãn $u_n \rightharpoonup u$, thì ta có

$$\mathcal{F}(u_n) \rightharpoonup \mathcal{F}(u).$$

Bổ đề 2.2. (xem [10]). Ta có các khẳng định dưới đây:

(i) $\langle u - \mathrm{Proj}_C u, v - \mathrm{Proj}_C u\rangle \leq 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}, v \in C$;

(ii) $\|\text{Proj}_C u - v\|^2 \leq \|u - v\|^2 - \|u - \text{Proj}_C u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}, v \in C;$

Bổ đề 2.3. (xem [11]). Cho $u, v \in \mathcal{H}$ và $s \geq t > 0$, khi đó bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{\|u - \text{Proj}_C(u - sv)\|}{s} \leq \frac{\|u - \text{Proj}_C(u - tv)\|}{t}.$$

.

Bổ đề 2.4. (xem [12]) . Cho $\mathcal{F}$ là một toán tử giả đơn điệu, liên tục trên $\mathcal{H}$. Khi đó $u^* \in VI(C, \mathcal{F})$ khi và chỉ khi

$$\langle \mathcal{F}u, u - u^* \rangle \geq 0$$

với mọi $u \in C$.

Bổ đề 2.5. (xem [13]). Giả sử $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ là hai không gian Hilbert thực. Giả sử $F : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ liên tục đều trên các tập con bị chặn của $\mathcal{H}_1$ và M là một tập con bị chặn của $\mathcal{H}_1$. Khi đó, $F(M)$ là bị chặn.

3. Kết quả

Thuật toán 3.1. Khởi tạo: Cho $\gamma > 0$, $l \in (0, 1)$, $\eta \in (0, 1)$. Đặt $u_1 \in \mathcal{H}$ là bất kỳ.

Các bước lặp: Với u_n hiện tại, tính u_{n+1} như sau:

- **Bước 1.** Tính:

  $$v_n = \text{Proj}_C(u_n - \rho_n \mathcal{F}u_n).$$

  Nếu $u_n = v_n$ hoặc $\mathcal{F}v_n = 0$, thì dừng lại và v_n là một nghiệm của bài toán $VI(C, \mathcal{F})$. Ngược lại, thực hiện Bước 2.

- **Bước 2.** Tính:

  $$u_{n+1} = \text{Proj}_{L_n}(u_n - \rho_n \mathcal{F}v_n),$$

  trong đó

  $$L_n = \{u \in H \mid \langle u_n - \rho_n \mathcal{F}u_n - v_n, u - v_n \rangle \leq 0\},$$

  trong đó ρ_n được xác định bởi $\rho_n = \gamma l^{m_n}$ với m_n là số nguyên nhỏ nhất sao cho

  $$\gamma l^{m_n} \langle \mathcal{F}v_n - \mathcal{F}u_n, v_n - u_{n+1} \rangle \leq \frac{\eta}{2} \left(\|u_n - v_n\|^2 + \|v_n - u_{n+1}\|^2 \right). \tag{3}$$

- **Bước 3.** Đặt $n := n + 1$ và quay lại **Bước 1**.

Mệnh đề 3.2. Cho $\{u_n\}$ là dãy được sinh bởi Thuật toán 3.1 và $p \in \text{VI}(C, F)$. Khi đó,

$$\|u_{n+1} - p\|^2 \leq \|u_n - p\|^2 - (1 - \eta) \left(\|u_n - v_n\|^2 + \|u_{n+1} - v_n\|^2 \right)$$

với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.2 và định nghĩa của u_{n+1}, ta có

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - p\|^2 &= \| \text{Proj}_{L_n}(u_n - \rho_n \mathcal{F}v_n) - p\|^2 \\
&\leq \|u_n - \rho_n \mathcal{F}v_n - p\|^2 - \|u_n - \rho_n \mathcal{F}v_n - u_{n+1}\|^2 \\
&= \|u_n - p\|^2 + \rho_n^2 \|\mathcal{F}v_n\|^2 - 2\rho_n \langle u_n - p, \mathcal{F}v_n \rangle - \|u_n - u_{n+1}\|^2 \\
&\quad - \rho_n^2 \|\mathcal{F}v_n\|^2 + 2\rho_n \langle u_n - u_{n+1}, \mathcal{F}v_n \rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|u_n - p\|^2 - \|u_n - u_{n+1}\|^2 + 2\rho_n\langle p - u_{n+1}, \mathcal{F}v_n\rangle \\
&= \|u_n - p\|^2 - \|u_n - u_{n+1}\|^2 - 2\rho_n\langle v_n - p, \mathcal{F}v_n\rangle + 2\rho_n\langle v_n - u_{n+1}, \mathcal{F}v_n\rangle.
\end{aligned}
$$

Do $p \in VI(C,\mathcal{F})$ nên $\langle \mathcal{F}p, v - p\rangle \geq 0, \forall v \in C$. Do tính giả đơn điệu của $\mathcal{F}$, ta có $\langle \mathcal{F}v, v - p\rangle \geq 0, \forall v \in C$. Vì $v_n \in C$, nên ta thu được $\langle \mathcal{F}v_n, v_n - p\rangle \geq 0$. Từ đó, suy ra

$$
\begin{aligned}
\|u_{n+1} - p\|^2 &\leq \|u_n - p\|^2 - \|u_n - u_{n+1}\|^2 + 2\rho_n\langle v_n - u_{n+1}, \mathcal{F}v_n\rangle \\
&= \|u_n - p\|^2 - \|u_n - v_n + v_n - u_{n+1}\|^2 + 2\rho_n\langle v_n - u_{n+1}, \mathcal{F}v_n\rangle \\
&= \|u_n - p\|^2 - \|u_n - v_n\|^2 - \|v_n - u_{n+1}\|^2 \\
&\quad - 2\langle u_n - v_n, v_n - u_{n+1}\rangle + 2\rho_n\langle v_n - u_{n+1}, \mathcal{F}v_n\rangle \\
&= \|u_n - p\|^2 - \|u_n - v_n\|^2 - \|v_n - u_{n+1}\|^2 + 2\langle v_n - u_n + \rho_n\mathcal{F}v_n, u_n - u_{n+1}\rangle \\
&= \|u_n - p\|^2 - \|u_n - v_n\|^2 - \|v_n - u_{n+1}\|^2 + 2\langle u_n - \rho_n\mathcal{F}u_n - v_n, u_{n+1} - u_n\rangle \\
&\quad + 2\rho_n\langle \mathcal{F}v_n - \mathcal{F}u_n, v_n - u_{n+1}\rangle.
\end{aligned}
$$

Do $u_{n+1} \in L_n$, ta có

$$\langle u_n - \rho_n\mathcal{F}u_n - v_n, u_{n+1} - v_n\rangle \leq 0,$$

điều này dẫn đến

$$
\begin{aligned}
\|u_{n+1} - p\|^2 &\leq \|u_n - p\|^2 - \|u_n - v_n\|^2 - \|v_n - u_{n+1}\|^2 + 2\rho_n\langle \mathcal{F}v_n - \mathcal{F}u_n, v_n - u_{n+1}\rangle \\
&\leq \|u_n - p\|^2 - \|u_n - v_n\|^2 - \|v_n - u_{n+1}\|^2 + \eta[\|u_n - v_n\|^2 + \|v_n - u_{n+1}\|^2] \\
&= \|u_n - p\|^2 - (1-\eta)\|u_n - v_n\|^2 - (1-\eta)\|v_n - u_{n+1}\|^2 \\
&= \|u_n - p\|^2 - (1-\eta)(\|u_n - v_n\|^2 + \|u_{n+1} - v_n\|^2).
\end{aligned}
$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Định lý 3.3. Dãy $\{u_n\}$ xác định bởi Thuật toán 3.1 hội tụ yếu về một nghiệm của Bài toán $VI(C,\mathcal{F})$.

Chứng minh. Lấy $p \in VI(C,\mathcal{F})$. Khi đó, từ Mệnh đề 3.2, ta có $\{\|u_n - p\|\}$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi 0. Suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n\to\infty}\|u_n - p\|$. Lại từ Mệnh đề 3.2 , ta có

$$(1-\eta)(\|u_n - v_n\|^2 + \|u_{n+1} - v_n\|^2) \leq \|u_n - p\|^2 - \|u_{n+1} - p\|^2 \to 0,$$

điều này dẫn đến

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\|u_n - v_n\| = 0, \qquad (4)\\
&\lim_{n\to\infty}\|u_{n+1} - v_n\| = 0.
\end{aligned}
$$

Từ Mệnh đề 3.2 , suy ra dãy $\{u_n\}$ bị chặn và do đó tồn tại một dãy con $\{u_{n_k}\}$ hội tụ yếu về một phần tử u^*. Từ (4), suy ra v_{n_k} hội tụ yếu về u^*. Vì $\{v_n\} \subset C$ và C là tập đóng yếu nên $u^* \in C$.

Từ $v_{n_k} = \mathrm{Proj}_C(u_{n_k} - \rho_{n_k}\mathcal{F}u_{n_k})$, ta có

$$\langle u_{n_k} - \rho_{n_k}\mathcal{F}u_{n_k} - v_{n_k}, u - v_{n_k}\rangle \leq 0,\ \forall u \in C,$$

điều này suy ra

$$\frac{1}{\rho_{n_k}}\langle u_{n_k} - v_{n_k}, u - v_{n_k}\rangle \leq \langle \mathcal{F}u_{n_k}, u - v_{n_k}\rangle,\ \forall u \in C,$$

hoặc tương đương với

$$\frac{1}{\rho_{n_k}}\langle u_{n_k} - v_{n_k}, u - v_{n_k}\rangle + \langle \mathcal{F}u_{n_k}, v_{n_k} - u_{n_k}\rangle \leq \langle \mathcal{F}u_{n_k}, u - u_{n_k}\rangle,\ \forall u \in C. \tag{5}$$

Tiếp theo, ta chỉ ra

$$\liminf_{k\to\infty}\langle \mathcal{F}u_{n_k}, u - u_{n_k}\rangle \geq 0. \tag{6}$$

Chúng ta xét hai trường hợp có thể xảy ra như sau:
Trường hợp 1: Giả sử $\liminf_{k\to\infty}\rho_{n_k} > 0$. Vì $\{u_n\}$ là một dãy bị chặn và $\mathcal{F}$ liên tục đều trên các tập con bị chặn của $\mathcal{H}$, nên theo Bổ đề 2.4, suy ra $\{\mathcal{F}u_{n_k}\}$ bị chặn. Trong (5) cho $k \to \infty$, ta nhận được

$$\liminf_{k\to\infty}\langle \mathcal{F}u_{n_k}, u - u_{n_k}\rangle \geq 0.$$

Trường hợp 2: Giả sử $\liminf_{k\to\infty}\rho_{n_k} = 0$. Đặt

$$t_{n_k} = \mathrm{Proj}_C(u_{n_k} - \rho_{n_k}l^{-1}\mathcal{F}u_{n_k}).$$

Vì $\rho_{n_k}l^{-1} > \rho_{n_k}$, theo Bổ đề 2.3, ta có

$$\|u_{n_k} - t_{n_k}\| \leq \frac{1}{l}\|u_{n_k} - v_{n_k}\| \to 0, \text{ khi } k \to \infty.$$

Do đó, $t_{n_k} \rightharpoonup u^*$. Từ đó suy ra $\{t_{n_k}\}$ là một dãy bị chặn. Lưu ý rằng $\mathcal{F}$ là ánh xạ liên tục đều trên tập con bị chặn của $\mathcal{H}$, nên ta có

$$\|\mathcal{F}u_{n_k} - \mathcal{F}t_{n_k}\| \to 0, \text{ khi } k \to \infty. \tag{7}$$

Từ (3), ta có

$$\begin{aligned}&\rho_{n_k}l^{-1}\left[\langle \mathcal{F}\,\mathrm{Proj}_C(u_{n_k} - \rho_{n_k}l^{-1}\mathcal{F}u_{n_k}) - \mathcal{F}u_{n_k}, \mathrm{Proj}_C(u_{n_k} - \rho_{n_k}l^{-1}\mathcal{F}u_{n_k}) - u_{n_k+1}\rangle\right]\\ &\quad > \frac{\eta}{2}\left[\|u_{n_k} - \mathrm{Proj}_C(u_{n_k} - \rho_{n_k}l^{-1}\mathcal{F}u_{n_k})\|^2 + \|\mathrm{Proj}_C(u_{n_k} - \rho_{n_k}l^{-1}\mathcal{F}u_{n_k}) - u_{n_k+1}\|^2\right],\end{aligned}$$

điều này suy ra

$$\begin{aligned}&\rho_{n_k}l^{-1}\|\mathcal{F}\,\mathrm{Proj}_C(u_{n_k} - \rho_{n_k}l^{-1}\mathcal{F}u_{n_k}) - \mathcal{F}u_{n_k}\|\|\mathrm{Proj}_C(u_{n_k} - \rho_{n_k}l^{-1}\mathcal{F}u_{n_k}) - u_{n_k+1}\|\\ &\quad > \eta\|u_{n_k} - \mathrm{Proj}_C(u_{n_k} - \rho_{n_k}l^{-1}\mathcal{F}u_{n_k})\|\|\mathrm{Proj}_C(u_{n_k} - \rho_{n_k}l^{-1}\mathcal{F}u_{n_k}) - u_{n_k+1}\|.\end{aligned}$$

Vì vậy ta thu được

$$\rho_{n_k}l^{-1}\|\mathcal{F}\,\mathrm{Proj}_C(u_{n_k} - \rho_{n_k}l^{-1}\mathcal{F}u_{n_k}) - \mathcal{F}u_{n_k}\| > \eta\|u_{n_k} - \mathrm{Proj}_C(u_{n_k} - \rho_{n_k}l^{-1}\mathcal{F}u_{n_k})\|,$$

điều này suy ra

$$\frac{1}{\eta}\left\|\mathcal{F}\,\mathrm{Proj}_C\left(u_{n_k} - \rho_{n_k}l^{-1}\mathcal{F}u_{n_k}\right) - \mathcal{F}u_{n_k}\right\| > \frac{\left\|u_{n_k} - \mathrm{Proj}_C\left(u_{n_k} - \rho_{n_k}l^{-1}\mathcal{F}u_{n_k}\right)\right\|}{\rho_{n_k}l^{-1}}. \tag{8}$$

Từ (7) và (8), ta có

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left\|u_{n_k} - \mathrm{Proj}_C\left(u_{n_k} - \rho_{n_k}l^{-1}\mathcal{F}u_{n_k}\right)\right\|}{\rho_{n_k}l^{-1}} = 0.$$

Mặt khác, theo định nghĩa của t_{n_k} và đặc trưng của phép chiếu mêtric, ta có

$$\left\langle u_{n_k} - \rho_{n_k} l^{-1} \mathcal{F} u_{n_k} - t_{n_k}, u - t_{n_k} \right\rangle \leq 0, \, \forall u \in C.$$

Suy ra

$$\frac{1}{\rho_{n_k} l^{-1}} \left\langle u_{n_k} - t_{n_k}, u - t_{n_k} \right\rangle + \left\langle \mathcal{F} u_{n_k}, t_{n_k} - u_{n_k} \right\rangle \leq \left\langle \mathcal{F} u_{n_k}, u - u_{n_k} \right\rangle, \, \forall u \in C. \tag{9}$$

Cho $k \to \infty$ trong (9), ta có

$$\liminf_{k \to \infty} \left\langle \mathcal{F} u_{n_k}, u - u_{n_k} \right\rangle \geq 0.$$

Do đó, bất đẳng thức (6) được thỏa mãn. Ta quan sát

$$\left\langle \mathcal{F} v_{n_k}, u - v_{n_k} \right\rangle = \left\langle \mathcal{F} v_{n_k} - \mathcal{F} u_{n_k}, u - u_{n_k} \right\rangle + \left\langle \mathcal{F} u_{n_k}, u - u_{n_k} \right\rangle + \left\langle \mathcal{F} v_{n_k}, u_{n_k} - v_{n_k} \right\rangle. \tag{10}$$

Do tính liên tục đều của $\mathcal{F}$ trên $\mathcal{H}$ và $\lim_{k \to \infty} \|u_{n_k} - v_{n_k}\| = 0$, ta có

$$\lim_{k \to \infty} \|\mathcal{F} u_{n_k} - \mathcal{F} v_{n_k}\| = 0.$$

Từ (6) và (10), ta có

$$\liminf_{k \to \infty} \left\langle \mathcal{F} v_{n_k}, u - v_{n_k} \right\rangle \geq 0.$$

Tiếp theo, ta chứng minh rằng $u^* \in VI(C, \mathcal{F})$. Thực vậy, ta chọn một dãy số $\{\epsilon_k\}$ dương, giảm dần về 0. Với mỗi k, ký hiệu N_k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho

$$\left\langle \mathcal{F} v_{n_j}, u - v_{n_j} \right\rangle + \epsilon_k \geq 0, \, \forall j \geq N_k.$$

Hơn nữa, với mỗi k, từ định nghĩa của $\{v_{N_k}\}$ ta có $\mathcal{F} v_{N_k} \neq 0$. Đặt

$$w_{N_k} = \frac{\mathcal{F} v_{N_k}}{\|\mathcal{F} v_{N_k}\|^2}.$$

Ta có $\left\langle \mathcal{F} v_{N_k}, w_{N_k} \right\rangle = 1$ với mỗi k và

$$\left\langle \mathcal{F} v_{N_k}, u + \epsilon_k w_{N_k} - v_{N_k} \right\rangle \geq 0.$$

Do tính giả đơn điệu của $\mathcal{F}$, ta suy ra

$$\left\langle \mathcal{F} \left(u + \epsilon_k w_{N_k} \right), u + \epsilon_k w_{N_k} - v_{N_k} \right\rangle \geq 0,$$

dẫn đến

$$\left\langle \mathcal{F} u, u - v_{N_k} \right\rangle \geq \left\langle \mathcal{F} u - \mathcal{F} \left(u + \epsilon_k w_{N_k} \right), u + \epsilon_k w_{N_k} - v_{N_k} \right\rangle - \epsilon_k \left\langle \mathcal{F} u, w_{N_k} \right\rangle. \tag{11}$$

Tiếp theo, ta chứng minh rằng $\lim_{k \to \infty} \epsilon_k w_{N_k} = 0$. Thực vậy, vì $v_{N_k} \rightharpoonup u^*$ khi $k \to \infty$ và $\mathcal{F}$ liên tục yếu theo dãy trên C, nên ta suy ra $\{\mathcal{F} v_{n_k}\}$ hội tụ yếu về $\mathcal{F} u^*$. Ta có $\mathcal{F} u^* \neq 0$. Do đó, từ tính nửa liên tục dưới của chuẩn, ta có

$$0 < \|\mathcal{F} u^*\| \leq \liminf_{k \to \infty} \|\mathcal{F} v_{n_k}\|.$$

Từ $\{v_{N_k}\} \subset \{v_{n_k}\}$ và $\epsilon_k \to 0$ khi $k \to \infty$, ta có

$$0 \leq \limsup_{k\to\infty} \|\epsilon_k w_{N_k}\| = \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{\epsilon_k}{\|\mathcal{F} v_{n_k}\|} \right) \leq \frac{\limsup_{k\to\infty} \epsilon_k}{\liminf_{k\to\infty} \|\mathcal{F} v_{n_k}\|} = 0.$$

Suy ra $\lim_{k\to\infty} \epsilon_k w_{N_k} = 0$. Cho $k \to \infty$, vế phải của (11) tiến về 0 do $\mathcal{F}$ là liên tục đều, $\{u_{N_k}\}$, $\{w_{N_k}\}$ bị chặn và $\lim_{k\to\infty} \epsilon_k w_{N_k} = 0$. Do đó, ta có

$$\liminf_{k\to\infty} \langle \mathcal{F}u, u - v_{N_k} \rangle \geq 0.$$

Do đó, với mọi $u \in C$, ta có

$$\langle \mathcal{F}u, u - u^* \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \mathcal{F}u, u - v_{N_k} \rangle = \liminf_{k\to\infty} \langle \mathcal{F}u, u - v_{N_k} \rangle \geq 0.$$

Từ Bổ đề 2.4, ta có $u^* \in VI(C, \mathcal{F})$.

Bây giờ ta sẽ chỉ ra u^* là điểm tụ yếu duy nhất của dãy $\{u_n\}$ hay $u_n \rightharpoonup q$. Thật vậy, giả sử v^* cũng là một điểm tụ yếu của $\{u_n\}$. Khi đó, tồn tại một dãy con $\{u_{n_l}\}$ của $\{u_n\}$ sao cho $u_{n_l} \rightharpoonup v^*$. Lập luận tương tự như trên, ta nhận được $v^* \in VI(C, \mathcal{F})$. Từ

$$2\langle u_n, u^* - v^* \rangle = \|u_n - u^*\|^2 - \|u_n - v^*\|^2 - \|u^*\|^2 - \|v^*\|^2$$

suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n\to\infty} \langle u_n, u^* - v^* \rangle = l$. Do đó, khi thay $\{u_n\}$ bởi $\{u_{n_k}\}$ và $\{u_{n_l}\}$, ta nhận được

$$\langle u^*, u^* - v^* \rangle = \langle v^*, u^* - v^* \rangle.$$

Điều này tương đương với $\|u^* - v^*\|^2 = 0$ hay $u^* = v^*$. Do vậy, dãy $\{u_n\}$ có duy nhất một điểm tụ yếu là u^* và do đó $u_n \rightharpoonup u^*$.
Định lý được chứng minh. □

4. Kết luận

Bài báo này đề xuất và nghiên cứu một thuật toán để xấp xỉ nghiệm của bất đẳng thức biến phân với ánh xạ giá giả đơn điệu trong không gian Hilbert thực. Sự hội tụ yếu của thuật toán được thiết lập trong Định lý 3.3 dựa trên một số điều kiện nhẹ của các tham số điều khiển. Do tính tự thích nghi, nên thuật toán đề xuất có thể áp dụng hiệu quả cho các lớp bất đẳng thức biến phân đơn điệu hay giả đơn điệu (có thể không Lipschitz).

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1] S. Karamardian, “Complementarity problems over cones with monotone and pseudomonotone maps,” *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 18, pp. 445–454, 1976.

[2] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, “An introduction to variational inequalities and their applications,” *SIAM Review*, vol. 23, no. 4, pp. 539–543, 1981.

[3] J.P. Aubin and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, Wiley, New York, 1984.

[4] C. Baiocchi and A. Capelo, *Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free-Boundary Problems*, Wiley & Sons, 1984.

[5] M.V. Solodov and P. Tseng, “Modified projection-type methods for monotone variational inequalities,” *SIAM J. Control Optim.*, vol. 34, pp. 1814–1830, 1996.

[6] G. M. Korpelevich, “Exstragradient method to find saddle points and other problems,” *Ekonomika i Mat. Metody*, vol. 12, no. 4, pp. 747–756, 1976.

[7] I.V. Konnov, *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*, Springer, Berlin, 2001.

[8] Y.V. Malitsky, "Projected reflected gradient methods for monotone variational inequalities," *SIAM J. Optim.*, vol. 25, pp. 502–520, 2015.

[9] T.N. Chu and T.T. Nguyen, "A self-adaptive algorithm for solving a class of bilevel split variational inequality problem in real Hilbert spaces," *TNU Journal of Science and Technology*, vol. 228, no. 10, pp. 491–499, 2023.

[10] K. Goebel and S. Reich, *Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings*, Marcel Dekker, New York, 1984.

[11] S.V. Denisov, V.V. Semenov and L.M. Chabak, "Convergence of the modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 51, pp. 757–765, 2015.

[12] R.W. Cottle and J.C. Yao, "Pseudo-monotone complementarity problems in Hilbert space," *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 75, pp. 281–295, 1992.

[13] A.N. Iusem and R. Garciga Otero, "Inexact versions of proximal point and augmented Lagrangian algorithms in Banach spaces," *Numer. Funct. Anal. Optim.*, vol. 22, pp. 609–640, 2001.