SOME NECESSARY CONDITIONS FOR SPLIT TOURNAMENTS HAVING NO DISJOINT CYCLES OF DIFFERENT LENGTHS

Le Nhu Hien[*], Mai Thanh Hong, Vu Thi Tuyet Mai, Chu Thi Quyen, Le Xuan Hung
Hanoi University of Industry

ARTICLE INFO

Received: 17/12/2024
Revised: 06/03/2025
Published: 07/03/2025

KEYWORDS

Tournament
Split tournament
Vertex-disjoint cycles
Strong digraph
Cycles of different lengths

ABSTRACT

A split tournament is a digraph graph *D = (V, A)* with a partition $V = I \cup K$ such that *D[K]* is a tournament, *D[K]* have no arc and for every two vertices $u \in I, v \in K$ exactly one of the arcs (u,v) and (v,u) is in *A*. We will denote such a digraph by $D = ST(I \cup K, A)$. The problem of studying the existence of disjoint cycles of different lengths in directed graphs was started in 1983 by C. Thomassen, and has so far yielded many profound and interesting results. In this paper, we will continue to study the existence of disjoint cycles of different lengths in new graphs, that is strong split tournaments with minimum out-degree 3. We prove some necessary conditions for such a class of split tournaments to have no disjoint cycles of different lengths. The main results in this paper are important initial contributions to finding a characterization for the class of strong split tournaments with minimum out-degree 3, have no disjoint cycles of different lengths.

MỘT SỐ ĐIỀU KIỆN CẦN CHO ĐỒ THỊ GIẢI ĐẤU TÁCH CỰC KHÔNG CÓ CÁC CHU TRÌNH RỜI NHAU VỚI ĐỘ DÀI KHÁC NHAU

Lê Nhu Hiền[*], Mai Thanh Hồng, Vũ Thị Tuyết Mai, Chu Thị Quyên, Lê Xuân Hùng
Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận bài: 17/12/2024
Ngày hoàn thiện: 06/03/2025
Ngày đăng: 07/03/2025

TỪ KHÓA

Đồ thị giải đấu
Đồ thị giải đấu tách cực
Chu trình rời nhau
Đồ thị liên thông mạnh
Chu trình có độ dài khác nhau

TÓM TẮT

Đồ thị giải đấu tách cực là đồ thị có hướng *D = (V, A)* với phân hoạch $V = I \cup K$ sao cho *D[K]* là đồ thị giải đấu, *D[I]* không có cung thuộc *A* và với mọi cặp đỉnh $u \in I, v \in K$ có đúng một trong các cung (u,v) và (v,u) thuộc *A*. Ta ký hiệu đồ thị giải đấu tách cực này là $D = ST(I \cup K, A)$. Vấn đề nghiên cứu sự tồn tại các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau trong các đồ thị có hướng được bắt đầu nghiên cứu từ năm 1983 bởi C. Thomassen, cho đến nay đã thu được nhiều kết quả sâu sắc và thú vị. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu sự tồn tại các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau trong các đồ thị mới, đó là lớp đồ thị giải đấu tách cực liên thông mạnh với bậc ra nhỏ nhất bằng 3. Chúng tôi chứng minh được một số điều kiện cần để lớp đồ thị giải đấu tách cực này không có các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau. Các kết quả chính trong bài báo này là những đóng góp bước đầu, quan trọng trong việc tìm ra một đặc trưng cho lớp đồ thị giải đấu tách cực liên thông mạnh với bậc ra nhỏ nhất bằng 3, không có các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau.

DOI: https://doi.org/10.34238/tnu-jst.11722

[*] Corresponding author. *Email: nhuhien060886@gmail.com*

1. Giới thiệu

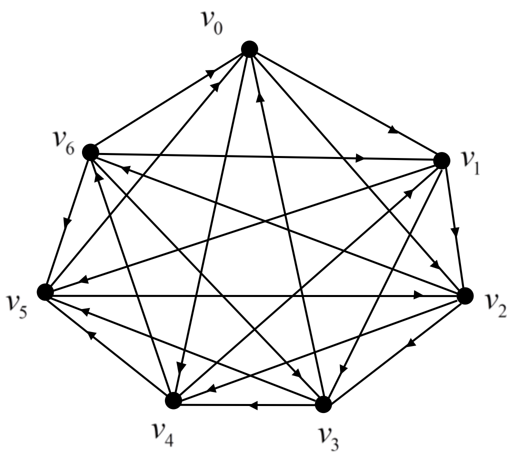
Đồ thị có hướng là một công cụ mạnh mẽ trong toán học và khoa học máy tính, được sử dụng để mô hình hóa và giải quyết nhiều vấn đề thực tế, chẳng hạn như xây dựng các cấu trúc dữ liệu, tìm kiếm đường đi, sắp xếp tô pô, phân tích mạng xã hội, xây dựng các công cụ tìm kiếm, và nhiều lĩnh vực khác.

Trong bài báo này, các đồ thị có hướng được xem xét là đồ thị có số đỉnh hữu hạn, không có khuyên, không có cạnh bội và không có chu trình với độ dài bằng 2. Giả sử $D=(V,A)$ là một đồ thị có hướng với V là *tập đỉnh* và A là *tập cung*. Đỉnh $v\in V$ gọi là *láng giềng ra* (tương ứng, *láng giềng vào*) của đỉnh $u\in V$ nếu $(u,v)\in A$ (tương ứng, $(v,u)\in A$). Chúng ta ký hiệu tập tất cả các láng giềng ra (tương ứng, láng giềng vào) của *u* là $N_D^+(u)$ hoặc $N^+(u)$ (tương ứng, $N_D^-(u)$ hoặc $N^-(u)$), $\left|N_D^+(u)\right|$ (tương ứng, $\left|N_D^-(u)\right|$) gọi là *bậc ra* (tương ứng, *bậc vào*) của *u* và được ký hiệu là $d_D^+(u)$ hoặc $d^+(u)$ (tương ứng, $d_D^-(u)$ hoặc $d^-(u)$), $\min\left\{d_D^+(u)\,|\,u\in V\right\}$ (tương ứng, $\min\left\{d_D^-(u)\,|\,u\in V\right\}$) gọi là *bậc ra nhỏ nhất* (tương ứng, *bậc vào nhỏ nhất*) của *D*. Nếu $W\subseteq V$ thì đồ thị con của *D* cảm sinh bởi tập *W* được ký hiệu là $D[W]$. Đồ thị có hướng $D=(V,A)$ gọi là *liên thông mạnh* nếu với mọi cặp đỉnh phân biệt $u,v\in V$ đều tồn tại đường đi từ *u* đến *v* và đường đi từ *v* đến *u*. Ngoài ra, các khái niệm khác về đồ thị có hướng được trình bày đầy đủ trong [1].

Đồ thị có hướng $D=(V,A)$ gọi là *đồ thị giải đấu* nếu với mọi cặp đỉnh phân biệt $u,v\in V$ đều tồn tại cung *uv* hoặc cung *vu* thuộc *A*. Đồ thị có hướng $D=(V,A)$ gọi là *đồ thị giải đấu tách cực* nếu tồn tại phân hoạch $V=I\cup K$ sao cho đồ thị $D[K]$ là đồ thị giải đấu, $D[I]$ không có cung thuộc *A* và với mọi cặp đỉnh $u\in I, v\in K$ đều tồn tại cung (*u*,*v*) hoặc cung (*v*,*u*) thuộc *A*. Chúng ta ký hiệu đồ thị giải đấu tách cực là $D=ST(I\cup K,A)$.

Các nhà nghiên cứu đã quan tâm đến các điều kiện để tồn tại các chu trình rời nhau trong đồ thị có hướng từ lâu. Năm 1983, Thomassen [2] đã chứng minh được rằng mọi đồ thị có hướng với bậc ra nhỏ nhất ít nhất bằng 3 đều chứa hai chu trình rời nhau. Tuy nhiên, kết quả này chưa xác định được độ dài của các chu trình rời nhau đó có khác nhau hay không. Tiếp theo, năm 2012, Henning và Yeo [3] đã đưa ra một giả thuyết rằng mọi đồ thị có hướng với bậc ra nhỏ nhất ít nhất bằng 4 đều chứa hai chu trình rời nhau có độ dài khác nhau. Giả thuyết này đã được chứng minh vào năm 2014 bởi Lichiardopol [4]. Như vậy, với đồ thị có hướng với bậc ra nhỏ nhất bằng 3 thì tồn tại các chu trình rời nhau nhưng độ dài các chu trình này có thể bằng nhau hoặc khác nhau. Hình 1 (đồ thị D_7^3 là đồ thị có tập đỉnh $V\left(D_7^3\right)=\{v_0,v_1,...,v_6\}$ và tập cạnh $A\left(D_7^3\right)=\left\{(v_i,v_j)|(j-i)(\bmod 7)\in\{1,2,4\}\right\}$) là một ví dụ minh họa cho đồ thị có hướng với bậc nhỏ nhất bằng 3 nhưng không tồn tại các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau. Trong những năm gần đây, nhiều nhà nghiên cứu đã quan tâm đến các điều kiện đảm bảo sự tồn tại của các chu trình rời nhau có độ dài khác nhau trong đồ thị có hướng, điển hình là các kết quả cho lớp đồ thị giải đấu và đồ thị giải đấu hai phần [5], lớp đồ thị giải đấu *k* phần [6], lớp đồ thị giải đấu bộ phận [7], (và các tài liệu tham khảo trong đó). Một số kiến thức quan trọng về lớp đồ thị giải đấu được trình bày trong [8].

Trong bài báo này, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu sự tồn tại các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau cho lớp đồ thị giải đấu tách cực. Các kết quả đạt được trong bài báo này là chứng minh được một số điều kiện cần để đồ thị giải đấu tách cực liên thông mạnh, có bậc ra nhỏ nhất bằng 3, nhưng không có các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau.



Hình 1. *Đồ thị* D_7^3

2. Phương pháp nghiên cứu

Bắt đầu từ đây, chúng ta luôn giả thiết rằng $D = ST(I \cup K, A)$ là đồ thị giải đấu tách cực liên thông mạnh với bậc ra nhỏ nhất bằng 3, không có các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau. Vì *D* có bậc ra nhỏ nhất bằng 3 nên theo C. Thomassen [2], *D* có hai chu trình rời nhau A^0 và A^1 chắc chắn có cùng độ dài $t \geq 3$. Giả sử với $j \in \{0,1\}$, đặt

$$A^j = (a_0^j, a_1^j, ..., a_{t-1}^j, a_0^j),$$
$$V' = V \setminus \left(V\left(A^0\right) \cup V\left(A^1\right)\right).$$

Trong các chứng minh dưới đây ta luôn giả sử $j \in \{0,1\}$ và $j+1$ được xác định theo modulo 2. Trước hết chúng ta xác định giá trị của *t*.

Bổ đề 1. *Độ dài các chu trình* A^0 *và* A^1 *là* $t = 3$ *và* A^j *chứa nhiều nhất một đỉnh thuộc I.*

Chứng minh. Giả sử $t \geq 4$. Trước hết ta giả sử a_0^j và a_2^j cùng thuộc *K*. Nếu $\left(a_0^j, a_2^j\right) \in A$ thì $\left(a_0^j, a_2^j, ..., a_{t-1}^j, a_0^j\right)$ và A^{j+1} là hai chu trình rời nhau với độ dài khác nhau, mâu thuẫn. Nếu $\left(a_2^j, a_0^j\right) \in A$ thì $\left(a_0^j, a_1^j, a_2^j, a_0^j\right)$ và A^{j+1} là hai chu trình rời nhau với độ dài khác nhau, mâu thuẫn. Do vậy a_0^j và a_2^j không thể cùng thuộc *K,* không mất tính tổng quát ta giả sử $a_0^j \in I$. Từ đó suy ra $a_1^j, a_{t-1}^j \in K$. Nếu $\left(a_1^j, a_{t-1}^j\right) \in A$ (tương ứng, $\left(a_{t-1}^j, a_1^j\right) \in A$) thì $\left(a_0^j, a_1^j, a_{t-1}^j, a_0^j\right)$ (tương ứng, $\left(a_{t-1}^j, a_1^j, ..., a_{t-1}^j\right)$) và A^{j+1} là hai chu trình rời nhau với độ dài khác nhau, mâu thuẫn. Vậy, $t = 3$.

Vì A^j có đúng ba đỉnh nên dễ dàng thấy A^j sẽ có nhiều nhất một đỉnh thuộc tập *I*. □

Từ Bổ đề 1, từ nay trở về sau chúng ta chỉ xét các chu trình A^0 và A^1 với độ dài $t = 3$. Tiếp theo ta sẽ chứng minh $V' \neq \phi$.

Bổ đề 2. $V' \neq \phi$.

Chứng minh. Giả sử $V' = \phi$. Khi đó đồ thị *D* chỉ có đúng 6 đỉnh, do đó ta có

$$18 \leq \sum_{v \in V(D)} d^+(v) = \left|A(D)\right| \leq C_6^2 = 15,$$

điều này là vô lý. Vậy, $V' \neq \phi$. □

Bổ đề 3. *Giả sử* $P=(v_1,v_2,...,v_l)$ *là một đường đi trong* $D\left[V^{'}\right]$. *Khi đó, nếu* v_l *có láng giềng ra trong* $V(P)$ *thì* $l\geq 3$ *và* v_{l-2} *là láng giềng ra duy nhất của* v_l *trong* $V(P)$. *Tương tự, nếu* v_1 *có láng giềng vào thì* $l\geq 3$ *và* v_3 *là láng giềng vào duy nhất của* v_1 *trong* $V(P)$.

Chứng minh. Giả sử v_l có một láng giềng ra $v_i\in V(P)$ với $i\neq l-2$ thì $C=(v_i,v_{i+1},...,v_l,v_i)$ là một chu trình có độ dài khác 3 trong $D\left[V^{'}\right]$. Khi đó, *C* và A^j là hai chu trình rời nhau có độ dài khác nhau trong *D*, điều này là mâu thuẫn. Vậy $l\geq 3$ và v_{l-2} là láng giềng ra duy nhất của v_l trong $V(P)$. Tương tự như vậy, chúng ta có thể chứng minh được nếu v_1 có láng giềng vào thì $l\geq 3$ và v_3 là láng giềng vào duy nhất của v_1 trong $V(P)$. □

Bổ đề 4. *Giả sử* $P=(v_1,v_2,...,v_l)$ *là một đường đi trong* $D\left[V^{'}\right]$. *Khi đó*

(i) Nếu v_1 *có một láng giềng vào trong* $V\left(A^j\right)$ *thì* v_l *có nhiều nhất một láng giềng ra trong* $V\left(A^j\right)$ *với* $j\in\{0,1\}$,

(ii) Nếu v_1 *có hai láng giềng vào trong* $V\left(A^j\right)$ *thì* v_l *không có láng giềng ra nào trong* $V\left(A^j\right)$ *với* $j\in\{0,1\}$,

(iii) Nếu v_l *có một láng giềng ra trong* $V\left(A^j\right)$ *thì* v_1 *có nhiều nhất một láng giềng vào trong* $V\left(A^j\right)$ *với* $j\in\{0,1\}$,

(iv) Nếu v_l *có hai láng giềng ra trong* $V\left(A^j\right)$ *thì* v_1 *không có láng giềng vào nào trong* $V\left(A^j\right)$ *với* $j\in\{0,1\}$.

Chứng minh. (i) Giả sử v_1 có một láng giềng vào $a_i^j\in V\left(A^j\right)$ nhưng v_l có hai láng giềng ra $a_r^j,a_s^j\in V\left(A^j\right)$. Khi đó $\left(a_i^j,P,a_r^j,...,a_i^j\right)$ và A^{j+1} hoặc $\left(a_i^j,P,a_s^j,...,a_i^j\right)$ và A^{j+1} là hai chu trình rời nhau có độ dài khác nhau trong *D*, điều này là mâu thuẫn.

(ii) Giả sử v_1 có hai láng giềng vào $a_r^j,a_s^j\in V\left(A^j\right)$ nhưng v_l có một láng giềng ra $a_i^j\in V\left(A^j\right)$. Khi đó $\left(a_r^j,P,a_i^j,...,a_r^j\right)$ và A^{j+1} hoặc $\left(a_s^j,P,a_i^j,...,a_s^j\right)$ và A^{j+1} là hai chu trình rời nhau có độ dài khác nhau trong *D*, điều này là mâu thuẫn.

(iii) Giả sử v_l có một láng giềng ra $a_i^j\in V\left(A^j\right)$ nhưng v_1 có hai láng giềng vào $a_r^j,a_s^j\in V\left(A^j\right)$. Khi đó $\left(a_r^j,P,a_i^j,...,a_r^j\right)$ và A^{j+1} hoặc $\left(a_s^j,P,a_i^j,...,a_s^j\right)$ và A^{j+1} là hai chu trình rời nhau có độ dài khác nhau trong *D*, điều này là mâu thuẫn.

(iv) Giả sử v_l có hai láng giềng ra $a_r^j,a_s^j\in V\left(A^j\right)$ nhưng v_1 có một láng giềng vào $a_i^j\in V\left(A^j\right)$. Khi đó $\left(a_i^j,P,a_r^j,...,a_i^j\right)$ và A^{j+1} hoặc $\left(a_i^j,P,a_s^j,...,a_i^j\right)$ và A^{j+1} là hai chu trình rời nhau có độ dài khác nhau trong *D*, điều này là mâu thuẫn. □

Bổ đề 5. *Giả sử* $u\in V^{'}$. *Đặt*

$$X_u = \{\, v\in V^{'} \mid \text{tồn tại đường đi từ } u \text{ đến } v \,\}.$$

Khi đó nếu u có hai láng giềng vào trong $V\left(A^j\right)$ với $j \in \{0,1\}$, *thì với mỗi đỉnh thuộc* X_u *đều không có láng giềng ra thuộc* $V\left(A^j\right)$ *và không có láng giềng vào thuộc* $V\left(A^{j+1}\right)$.

Chứng minh. Hiển nhiên ta có $u \in X_u$. Giả sử $v \in X_u$ và *P* là đường đi từ *u* đến *v*. Vì *u* có hai láng giềng vào trong $V\left(A^j\right)$ nên theo Bổ đề 4, *v* không có láng giềng ra nào trong $V\left(A^j\right)$.

Bây giờ ta giả sử $v \in X_u$ và *v* có một láng giềng vào trong $V\left(A^{j+1}\right)$. Giả sử $P = (v_1, v_2, ..., v_l)$ là một đường đi dài nhất trong $D\left[V'\right]$ với $v_1 = v$. Khi đó theo Bổ đề 3, v_l có nhiều nhất một láng giềng ra trong V' và theo chứng minh ở trên thì v_l không có láng giềng ra nào trong $V\left(A^j\right)$. Do đó, v_l có ít nhất hai láng giềng ra trong $V\left(A^{j+1}\right)$ vì bậc ra nhỏ nhất của *D* là 3, điều này mâu thuẫn với Bổ đề 4. □

Bổ đề 6. *Giả sử* $u \in V'$. *Khi đó*

(i) *Nếu* $\left(a_i^j, u\right) \in A$ *thì* $\left(u, a_{i+1}^j\right) \notin A$,

(ii) *Nếu* $\left(u, a_i^j\right) \in A$ *thì* $\left(a_{i-1}^j, u\right) \notin A$.

Chứng minh. (i) Giả sử $\left(u, a_{i+1}^j\right) \in A$. Khi đó $\left(a_i^j, u, a_{i+1}^j, ..., a_i^j\right)$ và A^{j+1} là hai chu trình rời nhau có độ dài khác nhau trong *D*, điều này là mâu thuẫn. Vậy, $\left(u, a_{i+1}^j\right) \notin A$.

(ii) Giả sử $\left(a_{i-1}^j, u\right) \in A$. Khi đó $\left(a_{i-1}^j, u, a_i^j, ..., a_{i-1}^j\right)$ và A^{j+1} là hai chu trình rời nhau có độ dài khác nhau trong *D*, điều này là mâu thuẫn. Vậy, $\left(a_{i-1}^j, u\right) \notin A$. □

Bổ đề 7. *Giả sử* $u \in V'$ *và u kề với tất cả các đỉnh của* A^j. *Khi đó*

(i) *Nếu u có một láng giềng ra thuộc* $V\left(A^j\right)$ *thì* $(u, v) \in A$ *với mọi* $v \in V\left(A^j\right)$,

(ii) *Nếu u có một láng giềng vào thuộc* $V\left(A^j\right)$ *thì* $(v, u) \in A$ *với mọi* $v \in V\left(A^j\right)$.

Chứng minh. (i) Không mất tính tổng quát ta giả sử $\left(u, a_0^j\right) \in A$. Vì *u* kề với tất cả các đỉnh của A^j nên theo (ii) của Bổ đề 6 ta có $\left(u, a_2^j\right) \in A$. Lập luận tương tự suy ra $\left(u, a_1^j\right) \in A$.

(ii) Không mất tính tổng quát ta giả sử $\left(a_0^j, u\right) \in A$. Vì *u* kề với tất cả các đỉnh của A^j nên theo (i) của Bổ đề 6 ta có $\left(a_1^j, u\right) \in A$. Lập luận tương tự ta có $\left(a_2^j, u\right) \in A$. □

3. Kết quả chính

Trong mục này, chúng tôi sẽ trình bày một số kết quả nghiên cứu chính của bài báo. Các kết tìm được là tìm ra mối quan hệ giữa các đỉnh thuộc V' với các đỉnh thuộc $V\left(A^0\right) \cup V\left(A^1\right)$ trong một số trường hợp.

Trường hợp đầu tiên chúng ta nghiên cứu là xem xét đỉnh *u* thuộc V' kề với tất cả các đỉnh của A^0 và A^1. Kết quả đạt được là Định lý 1 dưới đây.

Định lý 1. *Giả sử* $u \in V^{'}$ *và* u *kề với tất cả các đỉnh thuộc* $V\left(A^0\right) \cup V\left(A^1\right)$. *Khi đó hoặc là* $\left(v,u\right) \in A$ *với mọi* $v \in V\left(A^0\right)$ *và* $\left(u,v\right) \in A$ *với mọi* $v \in V\left(A^1\right)$, *hoặc là* $\left(v,u\right) \in A$ *với mọi* $v \in V\left(A^1\right)$ *và* $\left(u,v\right) \in A$ *với mọi* $v \in V\left(A^0\right)$.

Chứng minh. Vì A^j chứa nhiều nhất một đỉnh thuộc I nên tồn tại $w \in V\left(A^0\right) \cup V\left(A^1\right)$ sao cho u kề với w, nghĩa là $\left(w,u\right) \in A$ hoặc $\left(u,w\right) \in A$. Bằng cách đổi tên A^0 và A^1 ta giả sử $w \in V\left(A^0\right)$.

Trước hết, ta giả sử $\left(w,u\right) \in A$. Theo (ii) của Bổ đề 7 ta có $\left(v,u\right) \in A$ với mọi $v \in V\left(A^0\right)$. Giả sử $\left(v,u\right) \in A$ với mọi $v \in V\left(A^1\right)$. Vì D liên thông mạnh nên tồn tại đường $P = (v_1, v_2, ..., v_{l+1})$ với $v_1 = u, v_2, ..., v_l \in V^{'}, v_{l+1} \in V\left(A^0\right) \cup V\left(A^1\right)$. Từ đó suy ra mâu thuẫn với Bổ đề 4. Vậy, $\left(u,v\right) \in A$ với mọi $v \in V\left(A^1\right)$.

Bây giờ ta xét trường hợp $\left(u,w\right) \in A$. Theo (i) của Bổ đề 7 ta có $\left(u,v\right) \in A$ với mọi $v \in V\left(A^0\right)$. Giả sử $\left(u,v\right) \in A$ *với mọi* $v \in V\left(A^1\right)$. Vì D liên thông mạnh nên tồn tại đường $Q = (v_1, v_2, ..., v_{l+1})$ với $v_1 \in V\left(A^0\right) \cup V\left(A^1\right), v_2, ..., v_l \in V^{'}, v_{l+1} = u$. Từ đó suy ra mâu thuẫn với Bổ đề 4. Vậy, $\left(v,u\right) \in A$ *với mọi* $v \in V\left(A^1\right)$. □

Tiếp theo chúng ta nghiên cứu trường hợp đỉnh u thuộc $V^{'}$ không kề với đúng một đỉnh thuộc mỗi chu trình A^0 và A^1. Kết quả đạt được là Định lý 2 dưới đây.

Định lý 2. *Giả sử* $u \in V^{'}$, $u \in I$ *và* $A^j \cap I \neq \phi$ *với mọi* $j \in \{0,1\}$. *Khi đó*

(i) u có nhiều nhất một láng giềng vào thuộc tập $V\left(A^j\right)$ *với mọi* $j \in \{0,1\}$,

(ii) u có nhiều nhất một láng giềng vào thuộc $V\left(A^0\right) \cup V\left(A^1\right)$,

(iii) u có ít nhất một láng giềng vào thuộc $V\left(A^0\right) \cup V\left(A^1\right)$,

(iv) *u có đúng một láng giềng vào và có đúng ba láng giềng ra thuộc* $V\left(A^0\right) \cup V\left(A^1\right)$.

Nếu $a_r^0, a_s^1 \in I$ *thì hoặc là* $\left(a_{r+2}^0, u\right)$, $\left(u, a_{r+1}^0\right)$, $\left(u, a_{s+1}^1\right)$, $\left(u, a_{s+2}^1\right) \in A$, *hoặc là* $\left(a_{s+2}^1, u\right)$, $\left(u, a_{s+1}^1\right)$, $\left(u, a_{r+1}^0\right)$, $\left(u, a_{r+2}^0\right) \in A$. *Hơn nữa, nếu* $\left(a_{r+2}^0, u\right) \in A$ *(tương ứng,* $\left(a_{s+2}^1, u\right) \in A$*), thì ta cũng có* $\left(a_{r+2}^0, a_{s+1}^1\right)$, $\left(a_{r+2}^0, a_{s+2}^1\right) \in A$ *(tương ứng,* $\left(a_s^1, a_{r+1}^0\right)$, $\left(a_s^1, a_{r+2}^0\right) \in A$*).*

Chứng minh. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_0^0, a_0^1 \in I$. Khi đó theo Bổ đề 1 ta có $a_1^0, a_2^0, a_1^1, a_2^1 \in K$.

(i) Giả sử u có hai láng giềng vào thuộc tập $V\left(A^0\right)$, suy ra $\left(a_1^0, u\right)$, $\left(a_2^0, u\right) \in A$. Theo Bổ đề 5, $\left(u, a_1^1\right)$, $\left(u, a_2^1\right) \in A$. Vì bậc ra nhỏ nhất của u là 3 nên tồn tại $v \in V^{'}$ sao cho $\left(u, v\right) \in A$. Dễ thấy $v \in K$. Do đó, v kề với tất cả các đỉnh thuộc $V\left(A^0\right) \cup V\left(A^1\right)$. Từ Bổ đề 4 và Định lý 1 dễ dàng thấy rằng mọi đỉnh của $V\left(A^0\right)$ đều là láng giềng vào của *v* và mọi đỉnh của $V\left(A^1\right)$ đều là láng giềng ra của *v*. Nếu tồn tại đỉnh $a_i^1 \in V\left(A^1\right)$ có láng giềng ra $w \in V'$ thì theo Bổ đề 5 ta có $(w,v) \in A,$ từ đó dẫn đến mâu thuẫn với Bổ đề 4. Vậy, mọi đỉnh thuộc $V\left(A^1\right)$ không có láng giềng ra thuộc V'. Do đó mỗi đỉnh thuộc $V\left(A^1\right)$ có ít nhất hai láng giềng ra thuộc $V\left(A^0\right)$. Suy ra $\left(a_0^1, a_1^0\right), \left(a_0^1, a_2^0\right) \in A$.

Nếu $\left(a_1^1, a_1^0\right) \in A$ thì $\left(a_1^1, a_1^0, u, a_1^1\right)$ và $\left(v, a_0^1, a_2^0, a_0^0, v\right)$ là hai chu trình rời nhau có độ dài khác nhau, mâu thuẫn. Do đó $\left(a_1^0, a_1^1\right), \left(a_1^1, a_0^0\right), \left(a_1^1, a_2^0\right) \in A$.

Nếu $\left(a_2^1, a_1^0\right) \in A$ thì $\left(a_2^1, a_1^0, u, a_2^1\right)$ và $\left(v, a_0^1, a_2^0, a_0^0, v\right)$ là hai chu trình rời nhau có độ dài khác nhau, mâu thuẫn. Do đó $\left(a_1^0, a_2^1\right), \left(a_2^1, a_0^0\right), \left(a_2^1, a_2^0\right) \in A$. Khi đó, $\left(u, a_2^1, a_2^0, u\right)$ và $\left(v, a_0^1, a_1^1, a_0^0, v\right)$ là hai chu trình rời nhau có độ dài khác nhau, mâu thuẫn.

(ii) Giả sử *u* có hai láng giềng vào thuộc $V\left(A^0\right) \cup V\left(A^1\right)$. Theo (i), *u* có một láng giềng vào $z_0 \in V\left(A^0\right)$ và một láng giềng vào $z_1 \in V\left(A^1\right)$. Từ Bổ đề 6 dễ dàng suy ra $\left(a_2^0, u\right), \left(a_2^1, u\right), \left(u, a_1^0\right), \left(u, a_1^1\right) \in A$. Vì *D* có bậc ra nhỏ nhất bằng 3 nên tồn tại $v \in V'$ sao cho $(u,v) \in A$. Dễ thấy $v \in K$.

Nếu $\left(v, a_1^0\right) \in A$ thì $\left(a_1^0, a_2^0, u, v, a_1^0\right)$ và A^1 là hai chu trình rời nhau có độ dài khác nhau, mâu thuẫn. Do đó $\left(a_1^0, v\right) \in A$. Theo Định lý 1, mọi đỉnh của $V\left(A^0\right)$ đều là láng giềng vào của *v* và mọi đỉnh của $V\left(A^1\right)$ đều là láng giềng ra của *v*. Từ đó suy ra mâu thuẫn với Bổ đề 4.

(iii) Giả sử *u* không có láng giềng vào thuộc $V\left(A^0\right) \cup V\left(A^1\right)$. Suy ra $a_1^0, a_2^0, a_1^1, a_2^1$ là láng giềng ra của *u*. Vì *D* liên thông mạnh nên tồn tại một đường đi $P = (v_1, v_2, ..., v_{l+1})$ với $v_1 \in V\left(A^0\right) \cup V\left(A^1\right), v_2, ..., v_l \in V', v_{l+1} = u$. Từ đó dẫn đến mâu thuẫn với Bổ đề 4.

(iv) Từ (ii) và (iii) ta suy ra *u* có đúng một láng giềng vào và ba láng giềng ra thuộc $V\left(A^0\right) \cup V\left(A^1\right)$.

Nếu *u* có đúng một láng giềng vào thuộc $V\left(A^0\right)$ thì từ bổ đề 6 dễ dàng suy ra $\left(a_2^0, u\right) \in A$ và $\left(u, a_1^0\right), \left(u, a_1^1\right), \left(u, a_2^1\right) \in A$. Bây giờ ta xét mối quan hệ giữa a_0^0 với $\left(A^0\right)' = \left\{u, a_1^0, a_2^0, u\right\}$ và A^1. Dễ dàng suy ra $\left(a_0^0, a_1^1\right), \left(a_0^0, a_2^1\right) \in A$.

Nếu *u* có một láng giềng vào thuộc $V\left(A^1\right)$ thì bằng cách chứng minh tương tự như trên ta suy ra $\left(a_2^1, u\right) \in A$, $\left(u, a_1^1\right), \left(u, a_1^0\right), \left(u, a_2^0\right) \in A$ và $\left\{a_1^0, a_2^0\right\}\left(a_0^1, a_1^0\right), \left(a_0^1, a_2^0\right) \in A$. □

4. Kết luận

Nghiên cứu sự tồn tại các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau trong đồ thị có hướng là một hướng nghiên cứu mới, thú vị và có tính chất thời sự trong lý thuyết đồ thị. Chúng ta biết rằng, với đồ thị có hướng mà bậc ra nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng 4 thì đã được chứng minh là đều có các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau. Như vậy, trọng tâm nghiên cứu hiện nay là xem xét trường hợp đồ thị có hướng có bậc ra nhỏ nhất bằng 3. Đã có nhiều kết quả đạt được về hướng nghiên cứu này cho những lớp đồ thị có hướng khác nhau. Bài báo của chúng tôi tiếp tục theo hướng nghiên cứu này bằng việc xem xét lớp đồ thị giải đấu tách cực, trước mắt chúng tôi chứng minh được một số điều kiện cần để một đồ thị giải đấu tách cực liên thông mạnh với bậc ra nhỏ nhất bằng 3 nhưng không có các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau. Trong phần đầu của bài báo (Mục 2), một số bổ đề (từ Bổ đề 1 đến Bổ đề 7) đã được chứng minh làm cơ sở để dẫn đến kết quả chính (Mục 3). Các kết quả chính được trình bày trong Định lý 1 và Định lý 2. Từ những kết quả ban đầu này, hy vọng trong thời gian tới chúng tôi sẽ giải quyết được trọn vẹn bài toán đặt ra, nghĩa là tìm ra được đặc trưng (điều kiện cần và đủ) để một đồ thị giải đấu tách cực liên thông mạnh với bậc ra nhỏ nhất bằng 3 nhưng không có các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau.

Lời cám ơn

Các tác giả bài báo xin chân thành cám ơn các phản biện đã có những đóng góp quý báu, giúp cho bài báo được hoàn thiện một cách khoa học và đầy đủ hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1] J. Bang-Jensen and G. Gutin, *Digraphs. Theory, Algorithms and Applications*, Springer, New York, 2001.

[2] C. Thomassen, "Disjoint cycles in digraphs," *Combinatorica*, vol. 3, pp. 393 – 396, 1983.

[3] M. A. Henning and A. Yeo, "Vertex disjoint cycles of different length in digraphs," *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 26, pp. 687 – 694, 2012.

[4] N. Lichiardopol, "Proof of a conjecture of Henning and Yeo on vertex-disjoint directed cycles," *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 28, pp. 1618 – 1627, 2014.

[5] D. T. Ngo, "Tournaments and bipartite tournaments without vertex disjoint cycles of different lengths," *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 35, no. 1, pp. 485 – 494, 2021.

[6] X. H. Le, D. H. Do, and D. T. Ngo, "Vertex-disjoint cycles of different lengths in multipartite tournaments," *Discrete Math.*, vol. 345, 2022, Art. no. 112819.

[7] X. H. Le and D. T. Ngo, "Vertex-Disjoint Cycles of Different Lengths in Local Tournaments," *Graphs and Combinatorics*, vol. 39, no. 5, 2023, Art. no. 92.

[8] J. Bang-Jensen and F. Havet, "Tournaments and semicomplete digraphs," in *Classes of Directed Graphs*, J. Bang-Jensen and F. Havet, eds., Springer, New York, 2018, pp. 35 – 124.