TIÊU CHUẨN ỔN ĐỊNH MŨ TOÀN CỤC CỦA MẠNG NƠRON TẾ BÀO CÓ XUNG VÀ TRỄ BIẾN THIÊN

Đặng Thị Thu Hiền*, Nguyễn Thị Nhàn, Nguyễn Thị Hiền
Trường Đại học Hoa Lư, Ninh Bình

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu mô hình mạng nơron tế bào có xung và trễ biến thiên, là mở rộng của mô hình trong [1], [2]. Dựa trên việc xây dựng hàm Lyapunov và sử dụng một số kĩ thuật giải tích như: tính chất của hàm liên tục trên một đoạn, tính chất của $\inf$ và $\sup$,… chúng tôi sẽ xây dựng tiêu chuẩn ổn định mũ toàn cục mới cho điểm cân bằng của mạng nói trên. Ngoài ra, chúng tôi cũng lấy ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: *Ổn định mũ toàn cục, Mạng nơron tế bào , Xung, Trễ, Hàm Lyapunov.*

Ngày nhận bài: 22/01/2019; Ngày hoàn thiện: 19/02/2019; Ngày duyệt đăng: 28/02/2019

GLOBAL EXPONENTIAL STABILITY CRITERIA FOR IMPULSIVE CELLULAR NEURAL NETWORKS WITH TIME – VARYING DELAYS

Dang Thi Thu Hien*, Nguyen Thi Nhan, Nguyen Thi Hien
Hoa Lu University, Ninh Binh

ABSTRACT

In this paper, we study the model of impulsive cellular neural networks with time – varying delays, which is an extension of the model in [1], [2]. Based on the construction of the Lyapunov function and the use of some analytical techniques such as the properties of continuous functions on a segment, the properties of $\inf$, $\sup$, , and... we will build new global exponential stability criteria for the equilibrium point of the networks mentioned above. In addition, we also take example to illustrate the results achieved.

Keywords: *Global expontial stability, cellular neural networks, impulsive, delay, lyapunov function.*

Received: 22/01/2019 ; Revised: 19/02/2019; Approved: 28/02/2019

* Corresponding author: *Tel: 0947133778; Email: dtthien@hluv.edu.vn*

GIỚI THIỆU

Trong những năm gần đây mạng nơron tế bào có xung và trễ biến thiên đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu sâu rộng và mạnh mẽ của khắp các nhà khoa học trên thế giới vì các ứng dụng liên quan đến xử lí tín hiệu và hình ảnh, liên kết bộ nhớ, phân loại mẫu... Đã có nhiều kết quả công bố về sự ổn định mũ toàn cục cho điểm cân bằng của mạng. Kết quả trong [4], [7] cho thấy sự phụ thuộc của độ trễ τ vào các thời điểm xung, cụ thể yêu cầu $\tau \le t_k - t_{k-1}, \forall k \ge 1$ được đặt ra, do đó kết quả chỉ có giá trị đối với sự chậm trễ nhỏ nên không có ý nghĩa đối với một số ứng dụng thực tế. Kết quả trong [2], [3] đòi hỏi $D^+v(t) \le 0$, nghĩa là mạng ban đầu (không xung) cần được ổn định.

Kết quả trong [1] của Bo wu, Yang Liu, Jianquan Lu đạt được mà không cần điều kiện $D^+v(t) \le 0$, tức là mạng ban đầu không có tác động của xung có thể không ổn định, điều này cho thấy xung đóng vai trò quan trọng trong việc làm cho điểm cân bằng của mạng ổn định mũ toàn cục.

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng mô hình trong [1], [2], cụ thể sẽ nghiên cứu mô hình (1.1) dưới đây. Chúng tôi sẽ xây dựng tiêu chuẩn ổn định mũ toàn cục cho điểm cân bằng của mạng (1.1). Kết quả của chúng tôi có lợi thế so với một số kết quả đã công bố, cụ thể: độ trễ τ là bị chặn tùy ý và điều kiện $D^+v(t) \le 0$ không cần đặt ra.

$$\begin{cases} x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j\left(x_j(t-\tau_j(t))\right) + I_i, t \ne t_k, t > t_0 \\ \Delta x_i(t_k) = x_i(t_k^+) - x_i(t_k) = P_i\left(x_i(t_k)\right), k = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{1}$$

trong đó

$i = 1, 2, \ldots, n, n \ge 2$ là số nơron của mạng,

$\tau_j(t)$ là sự truyền trễ dọc theo sợi trục của các nơron thứ j và thỏa mãn $0 \le \tau_j(t) \le \tau$,

$0 \le t_0 < t_1 < t_2 < \ldots, \lim_{k\to\infty} t_k = \infty$, t_0 là thời điểm ban đầu, $t_1, t_2, \ldots,$ là các thời điểm xung,

$PC = \{\phi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n, \phi(t)$ liên tục trừ ra tại hữu hạn các điểm $\tilde{t}$ mà tại đó tồn tại $\phi(\tilde{t}^+), \phi(\tilde{t}^-)$ và $\phi(\tilde{t}^-) = \phi(\tilde{t})\}$,

$BC = \{\phi \in PC : \phi$ bị chặn trên $[-\tau, 0]\}$, với $\phi \in BC$ ta xác định $\|\phi\|_\tau = \sup_{s\in[-\tau,0]} \|\phi(s)\|$,

Điểm $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm cân bằng của hệ (1.1) nếu

$$\begin{cases} 0 = -c_i x_i^* + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j^*) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j(x_j^*) + I_i \\ 0 = P_i(x_i^*) \end{cases}, i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

Kí hiệu $x(t) = x(t, t_0, \phi)$ là nghiệm của hệ (1) thỏa mãn điều kiện ban đầu $x_{t_0} = \phi$, tức là $x_{t_0}(s) = x(t_0 + s) = \phi(s), s \in [-\tau, 0]$. Giả sử nghiệm của (1) liên tục khắp nơi trừ tại các thời điểm xung t_k mà tại đó nghiệm liên tục trái và tồn tại giới hạn phải.

Ta sẽ nghiên cứu mô hình (1) với các giả sử sau

A_1) Tồn tại các hằng số $L_i > 0, N_i > 0, i = 1,2,...,n$ thỏa mãn

$\left|f_i(x_1) - f_i(x_2)\right| \le L_i \,| x_1 - x_2 |, \left|g_i(x_1) - g_i(x_2)\right| \le N_i \left|x_1 - x_2\right|, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, i = 1,2,...,n.$

A_2) Các hàm P_i liên tục trên $\mathbb{R}$, $P_i\left(x_i(t_k)\right) = -\sigma_{ik}\left(x_i(t_k) - x_i^*\right), 1 - d_k < \sigma_{ik} < 1 + d_k$,

trong đó $0 < d_k < 1$, $i = 1,2,...,n, k = 1,2,...,$

A_3) Tồn tại duy nhất điểm cân bằng thỏa mãn (2).

MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Hàm $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ được gọi là thuộc lớp V_0 nếu

(i) V liên tục trên mỗi tập $(t_{k-1}, t_k] \times \mathbb{R}^n, k = 1,2,...,$ và $V(t,0) = 0, \forall t \ge t_0$,

(ii) $V(t,x)$ là Lipschitz địa phương theo x,

(iii) Với mỗi $k = 1,2,...$ tồn tại giới hạn $\lim\limits_{(t,y)\to(t_k^+,x)} V(t,y) = V(t_k^+, x).$

Định nghĩa 2. Cho hàm $V \in V_0$. Với $(t,x) \in [t_{k-1}, t_k) \times \mathbb{R}^n, k = 1,2,...,$ đạo hàm trên bên phải của $V \in V_0$ đối với hệ (1) được xác định bởi:

$$D^+V\left(t, x(t)\right) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{V\left(t+h, x(t+h)\right) - V\left(t, x(t)\right)}{h}.$$

Định nghĩa 3. Điểm cân bằng $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^T$ của hệ (1) được gọi là ổn định mũ toàn cục nếu $\exists \alpha > 0, \exists M \ge 1$ sao cho: $\left\|x(t,t_0,\phi) - x^*\right\| \le M\left\|\phi - x^*\right\|_\tau e^{-\alpha(t-t_0)}, \forall t \ge t_0.$

Đặt $y_i(t) = x_i(t) - x_i^*, i = 1,2,...,n$ thì hệ (1) trở thành:

$$\begin{cases} y_i'(t) = -c_i y_i(t) + \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}\left[f_j\left(y_j(t) + x_j^*\right) - f_j(x_j^*)\right] + \sum\limits_{j=1}^n b_{ij}\left[g_j\left(y_j(t - \tau_j(t)) + x_j^*\right) - g_j(x_j^*)\right] \\ \Delta y_i(t_k) = P_i\left(y_i(t_k) + x_i^*\right),\ i = 1,2,...,n,\ k = 1,2,... \end{cases}.$$

Bất đẳng thức Yuong: Cho $a, b \ge 0$ và $p, q > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó: $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

KẾT QUẢ CHÍNH

Trong mục này, chúng tôi xây dựng tiêu chuẩn ổn định mũ toàn cục cho điểm cân bằng của mạng nơron tế bào có xung và trễ biến thiên (1).

Định lí 1. Giả sử $p > 1, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n > 0$ và các điều kiện $A_1 - A_3$ được thỏa mãn. Đặt:

$$k_1 = \min_{1\le i\le n}\left[pc_i - L_i\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_i} - (p-1)\sum_{j=1}^n\left(L_j\left|a_{ij}\right|^{\frac{p}{p-1}} + N_j\left|b_{ij}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)\right],\ k_2 = \max_{1\le i\le n}\left(N_i\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right).$$

Giả sử: $k_1 > 0$ và $\exists \sigma > 0, \lambda > 0:$

(i) $-k_1+\dfrac{k_2e^{\lambda\tau}}{d_{k-1}^p}\le\sigma-\lambda, k=1,2,...,$ với $0<d_0<1,\ d_k$ được cho trong A_2,

(ii) $p\ln d_{k-1}<-(\sigma+\lambda)(t_k-t_{k-1}), k=1,2,...$

Khi đó, điểm cân bằng của hệ (1) là ổn định mũ toàn cục.

Chứng minh. Đặt $\alpha_{max}=\max\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\},\alpha_{min}=\min\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$.

Ta xác định hàm Lyapunov $v(t)=V\left(t,y(t)\right)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\left|y_i(t)\right|^p$ và xét $\|y(t)\|=\left(\sum_{i=1}^n\left|y_i(t)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Với $t\ge t_0$ và $t\ne t_k, k=1,2,...$ ta có: $D^+v(t)=\sum_{i=1}^n\alpha_i p\left|y_i(t)\right|^{p-1}\operatorname{sgn}(y_i(t))\,y_i'(t)$. Do đó:

$$D^+v(t)=\sum_{i=1}^n\alpha_i p\left|y_i(t)\right|^{p-1}\operatorname{sgn}\left(y_i(t)\right)\left[-c_iy_i(t)+\sum_{j=1}^n a_{ij}\left(f_j\left(y_j(t)+x_j^*\right)-f_j(x_j^*)\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^n b_{ij}\left(g_j\left(y_j(t-\tau_j(t))+x_j^*\right)-g_j(x_j^*)\right)\right]$$

$$\le\sum_{i=1}^n\alpha_i p\left[-c_i\left|y_i(t)\right|^p+\sum_{j=1}^n L_j\left|a_{ij}\right|\left|y_i(t)\right|^{p-1}\left|y_j(t)\right|+\sum_{j=1}^n N_j\left|b_{ij}\right|\left|y_i(t)\right|^{p-1}\left|y_j\left(t-\tau_j(t)\right)\right|\right].$$

Áp dụng bất đẳng thức Yuong với $p>1, q=\dfrac{p}{p-1}$ ta có:

$$\left(\left|y_j(t)\right|\right)\left(\left|a_{ij}\right|\left|y_i(t)\right|^{p-1}\right)\le\frac{\left|y_j(t)\right|^p}{p}+\frac{p-1}{p}\left|y_i(t)\right|^p\left(\left|a_{ij}\right|\right)^{\frac{p}{p-1}},$$

$$\left(\left|y_j\left(t-\tau_j(t)\right)\right|\right)\left(\left|b_{ij}\right|\left|y_i(t)\right|^{p-1}\right)\le\frac{\left|y_j\left(t-\tau_j(t)\right)\right|^p}{p}+\frac{p-1}{p}\left|y_i(t)\right|^p\left(\left|b_{ij}\right|\right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

Do đó $$D^+v(t)\le-\sum_{i=1}^n\left[pc_i-L_i\sum_{j=1}^n\frac{\alpha_j}{\alpha_i}-(p-1)\sum_{j=1}^n\left(L_j\left|a_{ij}\right|^{\frac{p}{p-1}}+N_j\left|b_{ij}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)\right]\alpha_i\left|y_i(t)\right|^p+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^n\left(N_i\sum_{j=1}^n\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right)\alpha_i\left|y_i\left(t-\tau_i(t)\right)\right|^p\right].$$

Suy ra, $D^+v(t)\le-k_1v(t)+k_2\sup_{t-\tau\le s\le t}v(s)$. Đặt $\gamma=\sup_{k\ge1}\left\{\dfrac{1}{d_{k-1}^p}\right\}$.

Từ giả thiết $A_1)$ $\dfrac{1}{d_{k-1}^p}\le\dfrac{\sigma-\lambda+k_1}{k_2e^{\lambda\tau}},\forall k\ge1\Rightarrow\gamma\le\dfrac{\sigma-\lambda+k_1}{k_2e^{\lambda\tau}}\Rightarrow-k_1+k_2e^{\lambda\tau}\gamma\le\sigma-\lambda.$

Theo A_2) ta có $\gamma \ge \dfrac{1}{d_{k-1}^p} > e^{(\sigma+\lambda)(t_1-t_0)} > 1$. Do đó, $\exists M \ge 1: e^{(\sigma+\lambda)(t_1-t_0)} \le M \le \gamma e^{\lambda\tau}$. (3)

Suy ra: $\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p < \left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{\sigma(t_1-t_0)} \le M\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t_1-t_0)}$.

Tiếp theo ta đi chứng minh: $v(t) \le \alpha_{max} M\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall t \in (t_0, t_1]$.

Để làm điều này, ta chỉ cần chứng minh: $v(t) \le \alpha_{max} M\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t_1-t_0)}, \forall t \in (t_0, t_1]$. (4)

Vì $v(t)$ liên tục trái tại t_1 nên để chứng minh (4) ta chỉ cần chứng minh:

$$v(t) \le \alpha_{max} M\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t_1-t_0)}, \forall t \in (t_0, t_1). \tag{5}$$

Giả sử (5) không đúng. Khi đó tồn tại $\bar{t} \in (t_0, t_1)$ sao cho

$$v(\bar{t}) > \alpha_{max} M\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t_1-t_0)} > \alpha_{max}\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p \ge v(t_0+s), \forall s \in [-\tau, 0]. \tag{6}$$

Đặt $\hat{t} = \inf\left\{t : v(t) = \alpha_{max} M\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t_1-t_0)}, t \in (t_0, \bar{t})\right\}$.

Dễ thấy, $\hat{t} \in (t_0, \bar{t})$ và $\begin{cases} v(\hat{t}) = \alpha_{max} M\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t_1-t_0)} \\ v(t) \le v(\hat{t}), \ \ t \in [t_0 - \tau, \hat{t}] \end{cases}$. (7)

Đặt: $\tilde{t} = \sup\left\{t : v(t) = \alpha_{max}\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p, t \in [t_0, \hat{t})\right\} \Rightarrow \tilde{t} \in [t_0, \hat{t}) : \begin{cases} v(\tilde{t}) = \alpha_{max}\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p \\ v(t) \ge v(\tilde{t}), t \in [\tilde{t}, \hat{t}] \end{cases}$ (8)

Với $\forall s \in [-\tau, 0], \forall t \in [\tilde{t}, \hat{t}]$ thì $t + s \in [\tilde{t} - \tau, \hat{t}] \subset [t_0 - \tau, \hat{t}]$. Do đó từ (3), (7), (8) ta có:

$v(t+s) \le \alpha_{max} M\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t_1-t_0)} \le \alpha_{max}\gamma e^{\lambda\tau}\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p = \gamma e^{\lambda\tau} v(\tilde{t}) \le \gamma e^{\lambda\tau} v(t)$.

Suy ra $D^+ v(t) \le -k_1 v(t) + k_2\gamma e^{\lambda\tau} v(t) = (-k_1 + k_2 e^{\lambda\tau}\gamma) v(t) \le (\sigma - \lambda) v(t), \forall t \in [\tilde{t}, \hat{t}]$.

Do đó hàm $u(t) = v(t)e^{-(\sigma-\lambda)t}$ nghịch biến trên $[\tilde{t}, \hat{t}]$. Do đó:

$$v(\hat{t}) \le v(\tilde{t})e^{(\sigma-\lambda)(\hat{t}-\tilde{t})} = \alpha_{max}\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{(\sigma-\lambda)(\hat{t}-\tilde{t})} < \alpha_{max}\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{\sigma(t_1-t_0)} <$$

$$< \alpha_{max} M\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t_1-t_0)} = v(\hat{t}) \text{ (vô lý) } \Rightarrow \text{(5) đúng}$$

Tiếp theo ta đi chứng minh: $v(t) \le \alpha_{max} M\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall t \in (t_{k-1}, t_k], \forall k \ge 1$.

Giả sử: $v(t) \le \alpha_{max} M\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall t \in (t_{k-1}, t_k]$, k=1,2,...,m. (9)

Ta sẽ chứng minh: $v(t) \le \alpha_{max} M\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall t \in (t_m, t_{m+1}]$. (10)

Vì $v(t)$ liên tục trái tại t_{m+1} nên để chứng (10) ta chỉ cần chứng minh :

$$v(t) \le \alpha_{max} M\left\|\phi - x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall t \in (t_m, t_{m+1}). \tag{11}$$

Giả sử (11) không đúng. Ta xác định $\overset{=}{t}=\inf\left\{t\in(t_m,t_{m+1}): v(t)>\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t-t_0)}\right\}$.

Ta có: $v(t_m^+)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\left|y_i(t_m)+P_i\left(y_i(t_m)+x_i^*\right)\right|^p=\sum_{i=1}^n\alpha_i\left|1-\sigma_{im}\right|^p\left|x_i(t_m)-x_i^*\right|^p\le$

$$\le\sum_{i=1}^n\alpha_i d_m^p\left|x_i(t_m)-x_i^*\right|^p=d_m^p v(t_m)\le d_m^p\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t_m-t_0)}<$$

$$<\left(d_m^p e^{\lambda(t_{m+1}-t_m)}\right)\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(\overset{=}{t}-t_0)}<\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(\overset{=}{t}-t_0)}.$$

Từ đó $\overset{=}{t}>t_m$. Từ tính liên tục của $v(t)$ và tính chất của $\inf$ ta có:

$$\begin{cases} v(\overset{=}{t})=\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(\overset{=}{t}-t_0)} \\ v(t)\le\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t-t_0)},\ \forall t\in(t_m,\overset{=}{t}) \end{cases} \tag{12}$$

Đặt: $t^*=\sup\left\{t\mid v(t)=d_m^p e^{\lambda(t_{m+1}-t_m)}\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(\overset{=}{t}-t_0)}, t\in(t_m,\overset{=}{t})\right\}$.

Dễ thấy $t^*\in(t_m,\overset{=}{t})$ và thỏa mãn $v(t^*)=d_m^p\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{\lambda(t_{m+1}-t_m)}e^{-\lambda(\overset{=}{t}-t_0)}$.

Với $\forall t\in[t^*,\overset{=}{t}],\forall s\in[-\tau,0]$ ta có $t+s\in(t_m-\tau,t_m]$ hoặc $t+s\in(t_m,\overset{=}{t})$ hoặc $t+s=\overset{=}{t}$.
Từ (6), (9), (12) ta có:

$$v(t+s)\le\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t+s-t_0)}\le\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(\overset{=}{t}-t_0)}e^{\lambda(\overset{=}{t}-t)}e^{\lambda\tau}$$

$$\le\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(\overset{=}{t}-t_0)}e^{\lambda(t_{m+1}-t_m)}e^{\lambda\tau}=\frac{v(t^*)e^{\lambda\tau}}{d_m^p}.$$

$$\Rightarrow\sup_{t-\tau\le s\le t}v(s)\le\frac{v(t^*)e^{\lambda\tau}}{d_m^p}\Rightarrow D^+v(t)\le\left(-k_1+k_2\frac{e^{\lambda\tau}}{d_m^p}\right)v(t)\le(\sigma-\lambda)v(t),\forall t\in[t^*,\overset{=}{t}].$$

Từ đó hàm $u(t)=v(t)e^{-(\sigma-\lambda)t}$ nghịch biến trên $[t^*,\overset{=}{t}]$. Điều này dẫn đến:

$$v(\overset{=}{t})\le v(t^*)e^{(\sigma-\lambda)(\overset{=}{t}-t^*)}=d_m^p\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{\lambda(t_{m+1}-t_m)}e^{-\lambda(\overset{=}{t}-t_0)}e^{(\sigma-\lambda)(\overset{=}{t}-t^*)}<$$

$$<e^{-(\sigma+\lambda)(t_{m+1}-t_m)}M\alpha_{\max}\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{\lambda(t_{m+1}-t_m)}e^{-\lambda(\overset{=}{t}-t_0)}e^{(\sigma-\lambda)(\overset{=}{t}-t_0)}e^{(\sigma-\lambda)(\overset{=}{t}-t^*)}$$

$$<\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{-\sigma(t_{m+1}-t_m)}e^{-\lambda(\overset{=}{t}-t_0)}e^{\sigma(\overset{=}{t}-t^*)}<\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(\overset{=}{t}-t_0)}=v(\overset{=}{t})\ \text{(vô lý)}.$$

Vậy ta đã chứng minh được: $v(t)\le\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t-t_0)},\ \forall t\in(t_{k-1},t_k],\ \forall k\ge1$ (13)

Hiển nhiên (13) đúng khi $t=t_0$. Do đó: $v(t)\le\alpha_{\max}M\left\|\phi-x^*\right\|_\tau^p e^{-\lambda(t-t_0)},\forall t\ge t_0$.

Vì $v(t)\ge\alpha_{\min}\left\|y(t)\right\|^p\Rightarrow\left\|x(t,t_0,\phi)-x^*\right\|=\left\|y(t)\right\|\le M^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\min}}\right)^{\frac{1}{p}}\left\|\phi-x^*\right\|_\tau e^{-\frac{\lambda}{p}(t-t_0)},\forall t\ge t_0$.

Do đó, điểm cân bằng của hệ (1) là ổn định mũ toàn cục. □

Trong **Định lí 1,** cho $\alpha_i = 1, \forall i = 1, 2, ..., n$ ta có hệ quả sau:

Hệ quả 2: Giả sử $p > 1$ và các điều kiện $A_1 - A_3$ được thỏa mãn. Đặt:

$$k_1 = \min_{1\le i\le n}\left[pc_i - nL_i - (p-1)\sum_{j=1}^{n}\left(L_j\left|a_{ij}\right|^{\frac{p}{p-1}} + N_j\left|b_{ij}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)\right],\ k_2 = \max_{1\le i\le n} nN_i.$$

Giả sử: $k_1 > 0$ và $\exists\sigma > 0, \lambda > 0$:

(i) $-k_1 + \dfrac{k_2 e^{\lambda\tau}}{d_{k-1}^{p}} \le \sigma - \lambda, k = 1, 2, ...$ với $0 < d_0 < 1$ và d_k được cho trong A_2,

(ii) $p\ln d_{k-1} < -(\sigma+\lambda)(t_k - t_{k-1}), k = 1, 2, ...$

Khi đó, điểm cân bằng của hệ (1.1) là ổn định mũ toàn cục.

VÍ DỤ

Sau đây chúng tôi lấy ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Ví dụ 1. Xét mạng nơron tế bào có xung và trễ sau:

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{2} a_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{2} b_{ij} g_j\left(x_j(t-\tau_j(t))\right) + I_i, t \ne t_k, t > t_0,$$ trong đó

$$f_i(x_i) = \frac{1}{2}\left(\left|x_i+1\right| - \left|x_i - 1\right|\right),\ g_i(x_i) = \left(\left|x_i+1\right| - \left|x_i - 1\right|\right)\ (i = 1, 2), t_0 = 0, t_k - t_{k-1} = 0.08,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0.2 \\ -0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, c_1 = c_2 = 3, I_1 = 3.4181818, I_2 = 0.3545456,$$

$$0 \le \tau_1(t) = \tau_2(t) = \sin^2(t) \le \tau = 1,\quad \begin{cases} x_1(t_k + 0) = \dfrac{1.8181818 - x_1(t_k)}{2} \\ x_2(t_k + 0) = \dfrac{1.0606064 - x_2(t_k)}{6} \end{cases}, k = 1, 2, ...$$

Dễ thấy f_i, g_i thỏa mãn điều kiện A_1 với $L_i = 1, N_i = 2,\ i = 1, 2$. Ta tính được $k_1 = 1.9, k_2 = 4,$ $, \sigma_{1k} = \dfrac{3}{2}, \sigma_{2k} = \dfrac{7}{6}, k = 1, 2, ...$ Chọn $d_k = 0.8, k = 0, 1, 2, ..., \sigma = 4.7, \lambda = 0.01, p = 2,$ ta thấy các điều kiện A_2, A_3 và của **Hệ quả 2** đều được thỏa mãn. Vậy điểm cân bằng duy nhất $x^* = (0.6060606, 0.1515152)^T$ của mạng là ổn định mũ toàn cục.

Ví dụ 2 . Xét mạng nơron tế bào có xung và trễ sau:

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{2} a_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{2} b_{ij} g_j\left(x_j(t-\tau_j(t))\right) + I_i, t \ne t_k, t > t_0,$$ trong đó

$$g_i \equiv f_i, f_i(x_i) = \frac{1}{2}\left(\left|x_i+1\right| - \left|x_i - 1\right|\right)(i = 1, 2), A = \begin{bmatrix} 0.6 & 1 \\ -1 & -1.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1.5 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$c_1 = c_2 = 4, I_1 = 1.31379308, I_2 = 1.05517244, t_0 = 0, t_k - t_{k-1} = 0.11,$$

$$0 \le \tau_1(t) = \tau_2(t) = \frac{1}{10}\cos^2 t \le \tau = \frac{1}{10}, \quad \begin{cases} x_1(t_k+0) = \dfrac{1.81034481 + 2x_1(t_k)}{5} \\ x_2(t_k+0) = \dfrac{-0.43103445 + 3x_2(t_k)}{8} \end{cases}, k = 1, 2, ...$$

Dễ thấy f_i, g_i thỏa mãn điều kiện A_1 với $L_i = N_i = 1, i = 1, 2$. Ta tính được

$$k_1 = 1.2045, k_2 = 2, \sigma_{1k} = \frac{3}{5}, \sigma_{2k} = \frac{5}{8}, k = 1, 2, ...$$

Chọn

$d_k = 0.9, k = 0, 1, 2, ..., \sigma = 1.3, \lambda = 0.1, p = 1.5$ dễ thấy giả sử A_2, A_3 và các điều kiện của **Hệ quả 2** đều được thỏa mãn. Vậy điểm cân bằng duy nhất

$x^* = (0.60344827, -0.08620689)^T$ của mạng là ổn định mũ toàn cục.

KẾT LUẬN

Nếu $g_i \equiv f_i, 1 \le i \le n$ thì mô hình (1.1) chính là mô hình trong [1], [2]. Như vậy kết quả của chúng tôi vừa góp phần xây dựng thêm tiêu chuẩn ổn định mũ toàn cục cho điểm cân bằng của mô hình trong [1], [2] vừa góp phần mở rộng kết quả ở mô hình tổng quát hơn. Với kết quả của chúng tôi, điều kiện ràng buộc trên các tham số của mạng là độc lập với độ trễ τ; hơn nữa, kết quả cũng cho thấy xung đóng vai trò quan trọng trong việc làm cho điểm cân bằng của mạng ổn định mũ toàn cục ngay cả khi mạng bạn đầu không xung có thể không ổn định, điều này đặc biệt có ý nghĩa đối với các ứng dụng trong kỹ thuật và công nghệ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bo wu, Yang Liu, Jianquan Lu (2012), "New results on global expontial stability for impulsive cellular neural networks with any bouned time – varying delays", *Mathematical and Computer Modelling*, 55, pp.837 – 843.
2. Ivanka M. Stamova, Rajcho Ilarionov (2010), "On global exponential stability for impulsive cellular neural networks", *Computers and Mathematics with Application*, 59, pp. 3508–3515.
3. Shair Ahmad, IvankaM.Stamova (2008), "Global exponential stability for impulsive cellular neural networks with time – varying delays", *Nonlinear Analysis*, 69, pp.786 – 795.
4. Xinzhi Liu and Qing Wang (2008), "Impulsive stabilization of high – order hopfield –type neural networks with time – varying delays", *iee transactions on neural networks*, 19(1), pp. 71-79.
5. Shui – Ming Cai, Feng –Dan Xu, Zeng – Rong Liu, Wei – Xing Zheng (2009), "Exponential stability analysis for impulsive neural networks with time – varying delays", *The third international symposium on optimization and systems biology*, 20 -22, pp. 81 – 88.
6. Huan Zhang, Wenbing Zhang, Zhi Li (2018), "Stability of delayed neural networks with impulsive strength – dependent average impulsive intervals", *Journal of nonlinear sciences and applications*, 11, pp. 602 – 612.
7. Qing wang, Xinzhi Liu (2008), "Impulsive stabilization of cellular neural networks with time delay via lyapunov functionals", *J.Nonlinear Sci. App*, 1, pp.72 – 86.