

ON COMPLETABLE UNIMODULAR ROWS OVER SEMIRINGS

Ha Chi Cong

University of Finance and Accountance

ARTICLE INFO	ABSTRACT
Received: 22/9/2021	In Ring theory, the unimodular rows play an important role in studying structures of Hermite rings and other important classes of rings. The basic calculus of unimodular rows was completely described by T.Y. Lam, P.M. Cohn,... especially, completable unimodular rows. According to T. Y. Lam (1978), a ring is right Hermite if any finitely generated stably free right module over the ring is free, and this is equivalent to requiring that any unimodular row on ring can be completed to an invertible matrix. However, when computing the completable unimodular rows on semirings, some properties are no longer true as in rings, and now there are not many research results about this problems. In this paper, we prove some basic properties of unimodular rows over arbitrary semirings; indicate a class of semirings in which set of unimodular rows and set of completable unimodular rows are not same; prove the necessary and sufficient conditions for all unimodular rows on commutative semirings can be completed to invertible matrices; describe structure of completable unimodular rows on class of zerosumfree semirings satisfying some given conditions.
Revised: 10/01/2022	
Published: 11/02/2022	
KEYWORDS	
Ring	
Semiring	
Unimodular row	
Invertible matrix	
Completable	

VỀ CÁC DÒNG ĐƠN MODULAR CÓ THỂ BỔ SUNG ĐƯỢC TRÊN NỬA VÀNH

Hà Chí Công

Trường Đại học Tài chính – Kế toán

THÔNG TIN BÀI BÁO	TÓM TẮT
Ngày nhận bài: 22/9/2021	Trong lý thuyết vành, các dòng đơn modular đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu cấu trúc vành Hermite và các lớp vành quan trọng khác, các tính toán cơ bản của dòng đơn modular đã được mô tả đầy đủ bởi T.Y. Lam, P.M. Chon,... đặc biệt là các dòng đơn modular có thể bổ sung được. Theo T.Y. Lam (1978), một vành là Hermite phải nếu mọi module phải tự do ổn định hữu hạn sinh là tự do, điều này tương đương với mọi dòng đơn modular đều có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch. Tuy nhiên, khi tính toán các dòng đơn modular có thể bổ sung được trên nửa vành, có một số tính chất không còn đúng như trên vành và hiện vẫn chưa có nhiều kết quả nghiên cứu về vấn đề này. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh một số tính chất cơ bản của các dòng đơn modular trên nửa vành tùy ý; chỉ ra một lớp nửa vành mà trên đó tập các dòng đơn modular và tập các dòng đơn modular có thể bổ sung được là không bằng nhau; chứng minh điều kiện cần và đủ để mọi dòng đơn modular trên nửa vành giao hoán có thể bổ sung được thành ma trận khả nghịch; mô tả cấu trúc các dòng đơn modular có thể bổ sung được trên lớp nửa vành phi khả đối thỏa một số điều kiện cho trước.
Ngày hoàn thiện: 10/01/2022	
Ngày đăng: 11/02/2022	
TỪ KHÓA	
Vành	
Nửa vành	
Dòng đơn modular	
Ma trận khả nghịch	
Có thể bổ sung được	

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.5077>Email: hachicong@tckt.edu.vn<http://jst.tnu.edu.vn>

3

Email: jst@tnu.edu.vn

1. Giới thiệu

Trong lý thuyết vành, việc tính toán các dòng đơn modular đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu cấu trúc của các vành Hermite và một số lớp vành quan trọng khác và đã thu được nhiều kết quả thú vị [1]-[3]. Trong [1], T. Y. Lam đã xem vành Hermite như là một vành mà trên đó mọi module tự do ổn định hữu hạn sinh đều tự do và đã chứng minh được rằng: Một vành là Hermite khi và chỉ khi mọi dòng đơn modular trên nó đều có thể bổ sung được thành ma trận khả nghịch. Tuy nhiên, khi xem xét các dòng đơn modular trên nửa vành, việc tính toán gặp nhiều hạn chế, do nửa vành nói chung không có phần tử đối. Vấn đề đặt ra là: *Các dòng đơn modular trên nửa vành có các tính chất đặc trưng nào? Các lớp nửa vành nào mà trên đó mọi dòng đơn modular đều có thể bổ sung được thành ma trận khả nghịch? Mô tả cấu trúc của các dòng đơn modular trên một số nửa vành cụ thể?...*

Trong ba thập niên trở lại đây, lý thuyết nửa vành được phát triển mạnh [4]; trong đó, ma trận trên nửa vành được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu và đã thu được nhiều kết quả thú vị về cấu trúc ma trận khả nghịch, ma trận lũy đẳng, hạng ma trận,... trên một số lớp nửa vành cụ thể [5]-[9]. Liên quan đến vấn đề đặt ra ở trên, có thể thấy, C. Reutenauer và H. Straubing [5] đã chứng minh được rằng: Trên nửa vành giao hoán, mọi ma trận vuông khả nghịch phải (trái) đều khả nghịch; Y. J. Tan đã chỉ ra một số đặc trưng của ma trận khả nghịch trên lớp nửa vành giao hoán [6], [7] và cũng đã chỉ ra một điều kiện cần và đủ để một dòng đơn modular trên nửa vành giao hoán có thể bổ sung được thành ma trận khả nghịch [8]. Tuy nhiên, các kết quả nghiên cứu về dòng đơn modular trên nửa vành tổng quát vẫn còn khiêm tốn. Trong bài báo này, chúng tôi xem xét một số đặc trưng khác của các dòng đơn modular trên nửa vành không nhất thiết giao hoán, mô tả cấu trúc của các dòng đơn modular trên một số lớp nửa vành đặc biệt. Trước hết, ta có một số định nghĩa và kết quả liên quan dưới đây.

2. Một số định nghĩa và kết quả liên quan

Trong bài viết này, chúng tôi chỉ xét cho nửa vành có đơn vị. Để thuận tiện cho việc trình bày, chuyển vị của ma trận A được ký hiệu là A' , một ma trận A cấp $m \times n$ thì được viết $A_{m \times n}$, tập hợp các ma trận cấp $m \times n$ trên nửa vành R được ký hiệu $M_{m \times n}(R)$, tập hợp các ma trận vuông cấp $n \times n$ trên nửa vành R được ký hiệu $M_n(R)$.

Định nghĩa 2.1 ([1]) Cho R là một vành, ma trận dòng $u = (u_1 \ \cdots \ u_n) \in M_{1 \times n}(R)$ được gọi là một dòng đơn modular nếu tồn tại ma trận cột $v = (v_1 \ \cdots \ v_n)^t \in M_{n \times 1}(R)$ sao cho $uv = (1)$. Một dòng đơn modular $u = (u_1 \ \cdots \ u_n)$ được gọi là *có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch* (còn được gọi là *có thể bổ sung được*) nếu tồn tại một ma trận $U' \in M_{(n-1) \times n}(R)$ sao cho ma trận vuông $U = \begin{pmatrix} u \\ U' \end{pmatrix} \in M_n(R)$ là ma trận khả nghịch.

Định nghĩa cho cột đơn modular được phát biểu hoàn toàn tương tự.

Định nghĩa 2.2 ([1]). Vành R được gọi là *vành Hermite* nếu mọi dòng (cột) đơn modular trên R đều có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch.

Định nghĩa 2.3 ([4]). *Nửa vành* là một đại số $(R, +, \cdot, 0)$ sao cho $(R, +, 0)$ là một vị nhóm giao hoán với phần tử đơn vị là 0 , $(R, \cdot, 1)$ là một vị nhóm với phần tử đơn vị là 1 , phép nhân phân phối hai phía đối với phép cộng và $0 \cdot r = r \cdot 0 = 0$ với mọi $r \in R$.

Nửa vành R được gọi là *giao hoán* nếu $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in R$.

Nửa vành R được gọi là *phi khả đối* nếu $a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0, \forall a, b \in R$.

Nửa vành R được gọi là *nguyên* nếu $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ hoặc $b = 0, \forall a, b \in R$.

Định nghĩa 2.4 ([6]). Cho R là nửa vành, phần tử $a \in R$ được gọi là *khả đối* nếu tồn tại $b \in R$ sao cho $a + b = 0$. Phần tử b được gọi là *phần tử đối* của a và ký hiệu là $b = -a$. Tập hợp tất cả các phần tử khả đối của R được ký hiệu là $V(R)$.

Định nghĩa 2.5 ([6]). Cho R là nửa vành, phần tử $a \in R$ được gọi là *khả nghịch* nếu tồn tại $b \in R$ sao cho $a.b = b.a = 1$. Phần tử b được gọi là *phần tử nghịch đảo* của a và ký hiệu là $b = a^{-1}$. Tập hợp tất cả các phần tử khả nghịch của R được ký hiệu là $U(R)$.

Định nghĩa 2.6 ([6]). Cho R là nửa vành, một ma trận vuông $A \in M_n(R)$ được gọi là *ma trận khả nghịch* nếu tồn tại ma trận $B \in M_n(R)$ sao cho $AB = BA = I_n$. Ma trận B được gọi là *ma trận nghịch đảo* của ma trận A và ký hiệu là $B = A^{-1}$. Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n khả nghịch trên nửa vành R được ký hiệu là $GL_n(R)$.

Ma trận vuông $A \in M_n(R)$ được gọi là *ma trận lũy đẳng* nếu $A^2 = A$.

Ma trận $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ được gọi là *ma trận chéo* nếu $a_{ij} = 0, \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$ và được ký hiệu là $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Định nghĩa 2.7 ([8]). Cho R là nửa vành, hai ma trận $A, B \in M_{m \times n}(R)$ được gọi là *tương đương* với nhau nếu tồn tại các ma trận khả nghịch $P \in GL_m(R), Q \in GL_n(R)$ sao cho $A = PBQ$.

Định nghĩa 2.8 ([8]). Cho R là nửa vành, hai ma trận vuông $A, B \in M_n(R)$ được gọi là *đồng dạng* với nhau nếu tồn tại ma trận khả nghịch $P \in GL_n(R)$ sao cho $A = P^{-1}BP$.

Mệnh đề 2.9 ([8, Lemma 2.1]). Cho R là nửa vành, khi đó:

- i) Với mọi $a, b \in R$ ta có $a + b \in V(R)$ khi và chỉ khi $a, b \in V(R)$.
- ii) Với mọi $s \in R$ và $a \in V(R)$ ta có $as, sa \in V(R)$ và $s(-a) = -sa$ và $(-a)s = -as$.
- iii) Với mọi $s, t \in R$ và $a, b \in V(R)$ ta có $s(t - b) = st - sb, (t - b)s = ts - bs, -(a + b) = -a - b$ và $(-a)(-b) = ab$.

Mệnh đề 2.10 ([8, Lemma 2.2]). Cho R là nửa vành giao hoán, $A = (a_{ij})_n \in M_n(R)$ là một ma trận khả nghịch. Khi đó,

- i) $a_{ik}a_{jk}, a_{ki}a_{kj} \in V(R), \forall i \neq j, 1 \leq i, j, k \leq n$.
- ii) Nếu $n = 2$ thì $a_{11}^2a_{22}^2 - 2a_{12}a_{21}a_{11}a_{22} + a_{12}^2a_{21}^2 \in U(R)$.

3. Kết quả nghiên cứu

Trong mục này, chúng tôi chứng minh một số tính chất đặc trưng của các dòng đơn modular trên nửa vành tùy ý; mô tả cấu trúc các dòng đơn modular trên lớp nửa vành nguyên phi khả đối thỏa một số điều kiện cho trước và chỉ ra điều kiện cần và đủ để một nửa vành giao hoán thỏa điều kiện: Mọi dòng đơn modular đều có thể bổ sung được thành một ma trận khả nghịch. Trước hết, ta có Định nghĩa về dòng (cột) đơn modular được phát biểu tương tự như trên vành.

Định nghĩa 3.1. Cho R là nửa vành, ma trận dòng $u = (u_1 \ \dots \ u_n) \in M_{1 \times n}(R)$ được gọi là một *dòng đơn modular* nếu tồn tại một ma trận cột $v = (v_1 \ \dots \ v_n)^t \in M_{n \times 1}(R)$ sao cho $uv = (1)$. Một dòng đơn modular $u = (u_1 \ \dots \ u_n)$ được gọi là *có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch* (còn được gọi là *có thể bổ sung được*) nếu tồn tại một ma trận $U' \in M_{(n-1) \times n}(R)$ sao cho ma trận vuông $U = \begin{pmatrix} u \\ U' \end{pmatrix} \in M_n(R)$ là ma trận khả nghịch.

Một ma trận cột $u = (u_1 \ \cdots \ u_n)^t \in M_{n \times 1}(R)$ được gọi là một *cột đơn modular* nếu tồn tại một ma trận dòng $v = (v_1 \ \cdots \ v_n) \in M_{1 \times n}(R)$ sao cho $vu = (1)$. Một cột đơn modular được gọi là *có thể bổ sung được thành ma trận khả nghịch* (còn được gọi là *có thể bổ sung được*) nếu tồn tại một ma trận $U' \in M_{n \times (n-1)}(R)$ sao cho ma trận vuông $U = (u \ U') \in M_n(R)$ là ma trận khả nghịch.

Số nguyên dương n được gọi là *chiều dài* của các dòng (cột) đơn modular nêu trên.

Dưới đây là một số đặc trưng của dòng đơn modular trên nửa vành tùy ý, các phát biểu là hoàn toàn tương tự cho các cột đơn modular.

Mệnh đề 3.2. Cho $u = (u_1 \ \cdots \ u_n) \in M_{1 \times n}(R)$ là một ma trận dòng trên nửa vành R . Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:

- i) u là một dòng đơn modular có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch.
- ii) Tồn tại một ma trận khả nghịch $V \in GL_n(R)$ sao cho $uV = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$.
- iii) uV là một dòng đơn modular có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch với mọi $V \in GL_n(R)$.

Chứng minh.

i) $\Leftrightarrow$ ii): Giả sử u là một dòng đơn modular có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch, suy ra tồn tại ma trận $U' \in M_{(n-1) \times n}(R)$ sao cho ma trận $U = \begin{pmatrix} u \\ U' \end{pmatrix}$ là ma trận khả nghịch, đặt $V = U^{-1}$ suy ra V là một ma trận khả nghịch và $UV = I_n$. Do đó, $uV = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$. Ngược lại, giả sử có ma trận khả nghịch V sao cho $uV = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$, gọi $v = (v_1 \ \cdots \ v_n)^t$ là vectơ cột đầu tiên của ma trận V , ta có $uv = (1)$ suy ra u là một dòng đơn modular. Mặt khác, $u = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)V^{-1}$ suy ra u là vectơ dòng đầu tiên của ma trận khả nghịch V^{-1} . Vậy u là một dòng đơn modular có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch.

i) $\Leftrightarrow$ iii): Giả sử u là một dòng đơn modular có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch, theo chứng minh trên, tồn tại ma trận khả nghịch $G \in GL_n(R)$ sao cho $uG = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$ suy ra $uV(V^{-1}G) = (1 \ 0 \ \cdots \ 0), \forall V \in GL_n(R)$. Do $V^{-1}G$ là ma trận khả nghịch nên uV cũng là dòng đơn modular có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch. Ngược lại, với mọi $V \in GL_n(R)$ sao cho uV là một dòng đơn modular có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch thì ta lại có $(uV)V^{-1} = u$ cũng là một dòng đơn modular có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch. $\square$

Mệnh đề 3.3. Cho R là nửa vành, $u = (u_1 \ \cdots \ u_n) \in M_{1 \times n}(R)$ là một dòng đơn modular có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch. Khi đó, tồn tại ma trận cột $v = (v_1 \ \cdots \ v_n)^t$ sao cho $uv = (1)$ và $A = vu$ là ma trận lũy đẳng đồng dạng với ma trận chéo $diag(1, 0, \dots, 0) \in M_n(R)$.

Chứng minh.

Do u là dòng đơn modular có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch nên tồn tại ma trận $U' \in M_{(n-1) \times n}$ sao cho $U = \begin{pmatrix} u \\ U' \end{pmatrix}$ là ma trận khả nghịch. Gọi v là vectơ cột đầu tiên của U^{-1} . Khi đó, do $UU^{-1} = I_n$ nên $uv = (1)$. Mặt khác, $(vu)^2 = v(uv)u = v(1)u = vu$ suy ra ma trận $A = vu$ là ma trận lũy đẳng. Đặt $X = Uv, Y = uU^{-1}$ ta có, $X^t = Y = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$ (do $UU^{-1} = I_n$) suy ra $XY = (Uv)(uU^{-1}) = UAU^{-1} = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)^t(1 \ 0 \ \cdots \ 0) = diag(1, 0, \dots, 0)$. $\square$

Nhận xét 3.4. Cho R là nửa vành và ma trận vuông $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ thỏa mãn điều kiện $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ 1, & i = j \end{cases}$ và $a_{ij} \in V(R), \forall i > j$. Khi đó, $A \in GL_n(R)$. Thật vậy, áp dụng Mệnh đề 2.9, ma trận khả nghịch của A được tạo ra bằng cách dùng các phép biến đổi sơ cấp dòng tương tự như trên vành đối với phép khử Gauss cho ma trận khối $(A \ I_n)$, để đưa ma trận này về ma trận tương đương có dạng $(I_n \ B)$. Khi đó, $B = A^{-1}$.

Mệnh đề 3.5. Cho số nguyên dương k và R là nửa vành, các mệnh đề sau là tương đương:

- i) Mọi dòng đơn modular có chiều dài không quá k đều có thể bổ sung được.
- ii) Với mọi ma trận $A \in M_{m \times n}(R)$, $1 \leq m \leq n \leq k$ sao cho tồn tại ma trận $B \in M_{n \times m}(R)$ thỏa mãn $AB = I_m$. Khi đó, tồn tại ma trận $V \in GL_n(R)$ sao cho $AV = (I_m \ 0)$.

Chứng minh.

ii) $\Rightarrow$ i) Hiển nhiên. Ta chứng minh i) $\Rightarrow$ ii) bằng phương pháp quy nạp như sau:

Theo Mệnh đề 3.2, kết quả đúng với $m, n \in \mathbb{N}$ sao cho $1 = m \leq n \leq k$. Bây giờ, giả sử $AB = I_m$, gọi A^1 là vectơ dòng trên cùng của ma trận A . Khi đó, A^1 là một dòng đơn modular có chiều dài $n \leq k$, suy ra A^1 có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch. Theo Mệnh đề 3.2, tồn tại ma trận khả nghịch $V \in GL_n(R)$ sao cho $A^1 V = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$. Đặt

$$AV = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A'_{(m-1) \times 1} & A''_{(m-1) \times (n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad U = V^{-1}B. \quad \text{Khi đó,} \quad AVU = AVV^{-1}B = AB = I_m. \quad \text{Đặt}$$

$$U = \begin{pmatrix} U^1_{1 \times 1} & U^2_{1 \times (m-1)} \\ U^3_{(n-1) \times 1} & U^4_{(n-1) \times (m-1)} \end{pmatrix} \quad \text{suy ra} \quad U^1 = 1, \quad U^2 = 0 \quad \text{suy ra}$$

$$A' + A''U^3 = 0 \quad (1)$$

$$A''U^4 = I_{m-1} \quad (2)$$

Từ (2) suy ra tồn tại ma trận khả nghịch $C \in GL_{n-1}(R)$ sao cho $A''C = (I_{m-1} \ 0)$ (theo giả thiết quy nạp). Khi đó, $AV \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A' & A''C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A' & I_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$. Mặt khác, từ (1) suy ra

mọi phần tử của ma trận A' đều khả đối. Theo Nhận xét 3.4, ma trận vuông $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A' & I_{m-1} \end{pmatrix}$ khả

nghịch, đặt $V' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A' & I_{m-1} \end{pmatrix}^{-1}$ ta có $AV \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V' & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} = (I_m \ 0)$. Mệnh đề được chứng minh xong. $\square$

Tiếp theo, chúng tôi chỉ ra một số đặc trưng khác của các dòng (cột) đơn modular trên một số lớp nửa vành cụ thể.

Định nghĩa 3.6. Cho R là nửa vành, gọi $Umr(R)$ ($Umc(R)$) là tập tất cả các dòng (cột) đơn modular trên R và $cUmr(R)$ ($cUmc(R)$) là tập tất cả các dòng (cột) đơn modular có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch.

Nhận xét 3.7. Trên nửa vành R tùy ý, ta luôn có $cUmr(R) \subseteq Umr(R)$, $cUmc(R) \subseteq Umc(R)$. Gọi $ecUmr(R)$ ($ecUmc(R)$) là tập các dòng (cột) đơn modular có dạng vectơ dòng (cột) đơn vị $e_i = (0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0)$ ($e_i^t = (0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0)^t$), trong đó, phần tử 1 nằm ở cột

(dòng) thứ i và các phần tử còn lại đều bằng 0. Do mọi ma trận hoán vị đều là ma trận khả nghịch nên $ecUmr(R) \subseteq cUmr(R) \subseteq Umr(R)$, $ecUmc(R) \subseteq cUmc(R) \subseteq Umc(R)$. Nói chung, các dấu bằng không xảy ra trên một lớp nửa vành khá rộng được chỉ ra ở Mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 3.8. Nếu R là nửa vành phi khả đối thì $cUmr(R)$ là tập con thực sự của $Umr(R)$; $cUmc(R)$ là tập con thực sự của $Umc(R)$.

Chứng minh.

Ta chứng minh cho trường hợp $cUmr(R)$ là tập con thực sự của $Umr(R)$, trường hợp còn lại được chứng minh tương tự. Giả sử $cUmr(R) = Umr(R)$, xét ma trận dòng $u = (1 \ 1)$ thỏa mãn

$(1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)$ nên u là một dòng đơn modular có chiều dài 2. Do $cUmr(R) = Umr(R)$ nên u có

thể bổ sung thành ma trận khả nghịch, suy ra tồn tại $\alpha, \beta \in R$ sao cho ma trận $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ là

ma trận khả nghịch. Đặt $U^{-1} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$. Khi đó, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ suy ra $n + q = 0$ suy ra $n = q = 0$ (do R là nửa vành phi khả đối). Mặt khác, $\alpha n + \beta q = 1$ suy ra $0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 1$ (vô lý). Vậy $cUmr(R)$ là tập con thực sự của $Umr(R)$. $\square$

Các kết quả dưới đây cho ta một số trường hợp dấu bằng xảy ra ở các bao hàm thức được nêu trong Nhận xét 3.7 trên.

Định lý 3.9. Cho R là nửa vành giao hoán. Khi đó, $cUmr(R) = Umr(R)$ khi và chỉ khi R là vành Hermite.

Chứng minh.

Giả sử $cUmr(R) = Umr(R)$, với mọi $a \in R, a \neq 0$ ta có $(1 \ a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)$ nên $u = (1 \ a)$ là một dòng đơn modular trên nửa vành R . Do $cUmr(R) = Umr(R)$ nên tồn tại $\alpha, \beta \in R$ sao cho ma trận $U = \begin{pmatrix} 1 & a \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ là ma trận khả nghịch. Đặt $U^{-1} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ là ma trận nghịch đảo của U . Ta có, $UU^{-1} = I_2$ và $U^{-1}U = I_2$ nên

$$n + aq = 0 \quad (3)$$

$$ma + n\beta = 0 \quad (4)$$

$$p + q\alpha = 0 \quad (5)$$

Mặt khác, do U^{-1} là ma trận khả nghịch nên theo Mệnh đề 2.10 ta có: $mn, pq, mp, nq \in V(R)$ và $m^2q^2 - 2mnpq + n^2p^2 \in U(R)$.

Từ (3) suy ra

$$n^2p^2 = -aqp^2 \quad (6)$$

$$am^2q^2 = -nm^2q \quad (7)$$

$$mn = -aqm \quad (8)$$

Mặt khác, từ (5) suy ra $pq = -q^2\alpha$ (9)

Từ (8) và (9) suy ra $-2mnpq = -2aq^3m\alpha$ (10)

Từ (6), (7) và (10) suy ra $a(m^2q^2 - 2mnpq + n^2p^2) = -nm^2q - 2a^2q^3m\alpha - a^2qnp^2$ suy ra $a = (-nm^2q - 2a^2q^3m\alpha - a^2qnp^2)(m^2q^2 - 2mnpq + n^2p^2)^{-1}$. Từ (4) suy ra $ma \in V(R)$ nên $-2a^2q^3m\alpha \in V(R)$, do $mn, pq, nq \in V(R)$ nên $-nm^2q \in V(R)$ và $-a^2qnp^2 \in V(R)$ suy ra $-nm^2q - 2a^2q^3m\alpha - a^2qnp^2 \in V(R)$. Vậy $a \in V(R)$ hay R là một vành và do $cUmr(R) = Umr(R)$ nên R là vành Hermite. Điều ngược lại là hiển nhiên đúng. $\square$

Nhận xét 3.10. Định lý 3.9 cũng được phát biểu hoàn toàn tương tự cho các cột đơn modular.

Định lý 3.11. Cho R là nửa vành nguyên phi khả đối thỏa mãn các điều kiện: Với mọi $a, b \in R$ ta có, $ab = 1 \Rightarrow a = b = 1$; $a + b = 1 \Rightarrow a = 1 \wedge b = 0$ hoặc $b = 1 \wedge a = 0$. Khi đó, mọi dòng đơn modular $u = (u_1 \cdots u_n)$ có thể bổ sung được đều có dạng vector đơn vị $u = (0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0)$, chỉ có một thành phần bằng 1 còn lại bằng 0. Hơn nữa, mọi ma trận khả nghịch được bổ sung từ u , có dạng $A = \begin{pmatrix} u \\ U' \end{pmatrix}_n$, đều là ma trận hoán vị.

Chứng minh.

Do $u = (u_1 \cdots u_n)$ là một dòng đơn modular nên tồn tại ma trận cột v với $v^t = (v_1 \cdots v_n)$ sao cho $uv = (1)$ hay $\sum_{i=1}^n u_i v_i = 1$ suy ra tồn tại $u_k v_k = 1, 1 \leq k \leq n$ suy ra $u_k = v_k = 1$. Do đó, $u = (u_1 \cdots 1 \cdots u_n)$, phần tử 1 ở cột thứ k . Tồn tại ma trận hoán vị P sao cho $uP = (1 \ u'_2 \cdots u'_n)$. Theo Mệnh đề 3.2 ta có uP là một dòng đơn modular có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch. Gọi $U = (u_{ij})_n$ là ma trận khả nghịch được bổ sung từ uP và $U^{-1} = V = (v_{ij})_n$, trong đó, $(u_{11} \cdots u_{1n}) = (1 \ u'_2 \cdots u'_n)$. Nếu tồn tại $i, 2 \leq i \leq n$ sao cho $u_{1i} \neq 0$. Khi đó, do $UV = I_n$ và R là nửa vành nguyên phi khả đối nên

$$v_{i2} = \cdots = v_{in} = 0 \quad (11)$$

$$v_{12} = \cdots = v_{1n} = 0 \quad (12)$$

Do $VU = I_n$ nên $1 = \sum_{l=1}^n v_{il} u_{li}$, theo (11) ta có $1 = v_{i1} u_{1i}$ suy ra $v_{i1} = u_{1i} = 1$. Mặt khác, $1 = \sum_{l=1}^n v_{1l} u_{li}$, theo (12) ta có $v_{11} u_{11} = 1$ suy ra $v_{11} = 1$.

Do $UV = I_n$ và $u_{11} = 1$ nên $1 = \sum_{l=1}^n u_{1l} v_{l1} = 1 + \sum_{l=2}^n u_{1l} v_{l1}$ suy ra $\sum_{l=2}^n u_{1l} v_{l1} = 0$ suy ra $u_{1l} v_{l1} = 0$. Do $u_{1i} = 1$ nên $v_{i1} = 0$, điều này mâu thuẫn với $v_{i1} = 1 \neq 0$. Vậy $uP = (1 \ 0 \cdots 0)$ suy ra $u = (1 \ 0 \cdots 0)P^{-1}$ hay u là vector dòng trên cùng của ma trận hoán vị P^{-1} . Bây giờ, giả sử tồn tại ma trận khả nghịch Q có dòng trên cùng là $u = (1 \ 0 \cdots 0)P^{-1}$. Đặt $L = Q^{-1}$ ta có $QL = LQ = I_n$, suy ra các dòng còn lại của Q cũng là các dòng đơn modular và do Q khả nghịch nên các dòng của Q đều là các dòng đơn modular có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch. Theo chứng minh trên, các vector dòng của Q đều có dạng vector đơn vị $e_j = (0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0)$, thành phần thứ j nào đó bằng 1 còn lại bằng 0. Để chứng minh Q là ma trận hoán vị, ta chỉ cần chứng minh mọi cột của ma trận Q có không quá một phần tử 1. Thật vậy, giả sử tồn tại cột thứ j

của ma trận Q có hai phần tử 1 là $q_{ij} = q_{kj} = 1, i \neq k$, suy ra $q_{km} = 0, \forall m \neq j$ và $q_{ir} = 0, \forall r \neq j$ (do mọi dòng của Q đều có dạng vector đơn vị). Do $QL = I_n$ nên $1 = \sum_{r=1}^n q_{kr} l_{rk} = q_{kj} l_{jk} = l_{jk}$. Mặt khác, do $i \neq k$ nên $0 = \sum_{r=1}^n q_{ir} l_{rk} = q_{ij} l_{jk} = l_{jk}$, điều này mâu thuẫn với $l_{jk} = 1 \neq 0$. Vậy Q là một ma trận hoán vị. $\square$

Chú ý 3.12.

- i) Nửa vành các số tự nhiên $\mathbb{N}$ là thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.11 ở trên.
 ii) Từ một dòng đơn modular có dạng $u = (0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0)$ được xác định như trong Định lý 3.11, ta có thể có nhiều cách bổ sung để thành một ma trận khả nghịch, chẳng hạn như khi $n = 3$, xét dòng đơn modular $u = (1 \ 0 \ 0)$, ta có thể bổ sung thành các ma trận khả nghịch như sau:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- iii) Cho R là nửa vành nguyên phi khả đối thỏa mãn các điều kiện: $a.b=1 \Rightarrow a=b=1$ và $a+b=1 \Rightarrow a=1 \wedge b=0$ hoặc $b=1 \wedge a=0$, với mọi $a, b \in R$. Khi đó, $ecUmr(R) = cUmr(R)$.

- iv) Định lý 3.11 có thể được phát biểu tương tự cho trường hợp các cột đơn modular.

4. Kết luận

Bài báo đã đạt được một số kết quả chính sau đây: Chỉ ra một số tính chất đặc trưng cơ bản của dòng đơn modular trên nửa vành tùy ý thể hiện qua các Mệnh đề 3.2, Mệnh đề 3.3, Mệnh đề 3.5, Mệnh đề 3.8. Chứng minh điều kiện cần và đủ để mọi dòng đơn modular trên nửa vành giao hoán có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch ở Định lý 3.9. Mô tả cấu trúc của các dòng đơn modular có thể bổ sung thành ma trận khả nghịch trên lớp nửa vành nguyên phi khả đối thỏa một số điều kiện cho trước, thể hiện ở Định lý 3.11.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] T. Y. Lam, *Serre's Problem on Projective Modules*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [2] P. M. Cohn, "From Hermite rings to Sylvester domains," *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 128, no. 7, pp. 1899-1904, 1999.
- [3] O. Lezama and C. Gallego, "Matrix approach to noncommutative stably free modules and Hermite rings," *Algebr. Discret. Math.*, vol. 18, no. 1, pp. 109-137, 2014.
- [4] J. S. Golan, *Semirings and their Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1999.
- [5] C. Reutenauer and H. Straubing, "Inversion of matrices over a commutative semiring," *J. Algebr.*, vol. 88, no. 2, pp. 350-360, 1984.
- [6] Y. J. Tan, "On invertible matrices over antirings," *Linear Algebra Appl.*, vol. 423, no. 2-3, pp. 428-444, 2007.
- [7] Y. J. Tan, "On invertible matrices over commutative semirings," *Linear Multilinear Algebr.*, vol. 61, no. 6, pp. 710-724, 2013.
- [8] Y. J. Tan, "Diagonability of matrices over commutative semirings," *Linear Multilinear Algebr.*, vol. 68, no. 9, pp. 1743-1752, 2020.
- [9] M. Akian, S. Gaubert, and A. Guterman, "Linear independence over tropical semirings and beyond," *Trop. idempotent Math. Contemp. Math.*, vol. 495, pp. 1-38, 2009.