

THE METHOD PROVING INEQUALITY BY USING TANGENTIAL CURVE

Le Anh Tuan

Ha Noi University of Industry

ARTICLE INFO	ABSTRACT
<p>Received: 04/12/2000</p> <p>Revised: 28/5/2021</p> <p>Published: 31/5/2021</p>	<p>Inequality and related problems is a growing problem that attracts the attention of many people studying primary mathematic. Inequality issues occupy an important position in elementary math and are used a lot in national and international exams for excellent students. We know there are many techniques and methods to prove the inequality. With the aim of developing methods and techniques to prove the inequality. In this paper, using the extended Jensen inequality, we develop the tangent method into the tangent curve method to prove some inequality problems under non-linear conditions.</p>
<p>KEYWORDS</p> <p>Inequality Tangential Curve Tangent Convex function</p>	

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC SỬ DỤNG ĐƯỜNG CONG TIẾP XÚC

Lê Anh Tuấn

Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội

THÔNG TIN BÀI BÁO	TÓM TẮT
<p>Ngày nhận bài: 04/12/2000</p> <p>Ngày hoàn thiện: 28/5/2021</p> <p>Ngày đăng: 31/5/2021</p>	<p>Bất đẳng thức và các vấn đề liên quan là một vấn đề đang ngày càng phát triển và thu hút được sự quan tâm của nhiều người nghiên cứu toán sơ cấp trong và ngoài nước. Các vấn đề về bất đẳng thức chiếm một vị trí khá quan trọng đối với toán sơ cấp và được sử dụng tương đối nhiều trong đề thi các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Chúng ta biết có rất nhiều kỹ thuật, phương pháp chứng minh bất đẳng thức. Với mục tiêu phát triển các phương pháp và kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức, trong bài báo này, bằng việc sử dụng bất đẳng thức Jensen mở rộng, chúng tôi phát triển phương pháp tiếp tuyến thành phương pháp đường cong tiếp xúc để chứng minh một số bài toán bất đẳng thức với điều kiện không tuyến tính.</p>
<p>TỪ KHÓA</p> <p>Bất đẳng thức Tiếp xúc Đường cong Tiếp tuyến Hàm lồi</p>	

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.3819>

Email: tuansl83@yahoo.com

<http://jst.tnu.edu.vn>

277

Email: jst@tnu.edu.vn

1 Phương pháp đường cong tiếp xúc

Nhiều bài toán trong thực tế dẫn đến việc chúng ta cần chứng minh các bất đẳng thức với các điều kiện cho trước như bất đẳng thức sau.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq nf(x_0), \quad (1)$$

trong đó $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^n l(x_i) = n.l(x_0)$ với l là một hàm phù hợp nào đó.

Ngoài ra các bài toán dạng bất đẳng thức như trên được nghiên cứu, chứng minh bằng các phương pháp khác nhau ([1],[2], [3], [4]).

Ngoài ra, có thể thấy rằng, nếu chọn f là hàm lồi, $l(x) = x$ và $x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ thì bất đẳng thức (1) nhận lại bất đẳng thức Jensen [5]. Phát triển của bất đẳng thức Jensen ta được khi ta tìm một hàm $g(x) = kx + m$ sao cho $f(x) \geq g(x)$ với mọi x nằm trong một khoảng nào đó chứa x_0 và $f(x_0) = g(x_0)$ ta được phương pháp chứng minh được gọi là phương pháp tiếp tuyến được giới thiệu trong [6] và [7].

Trường hợp hàm f và l bất kì. Vấn đề cần quan tâm ở đây là tìm các hàm $f(x)$, $g(x) = k.l(x) + m$; giá trị x_0 sao cho bất đẳng thức (1) đúng.

Về mặt hình học: Đồ thị của hàm $y = f(x)$ sẽ luôn nằm trên đồ thị hàm số $y = g(x)$ và tiếp xúc với đồ thị hàm $y = g(x)$ tại điểm có hoành độ x_0 . Việc tìm hàm $g(x)$ như trên được gọi là *phương pháp đường cong tiếp xúc*.

Định lý sau đây cho ta một điều kiện đủ để bất đẳng thức (1) đúng.

Định lý 1. Cho f và l là các hàm số xác định trên khoảng mở I . Giả sử rằng các hàm số f và l khả vi tại điểm $x_0 \in I$. Đặt

$$k = \begin{cases} 0 & \text{khi } l'(x_0) = 0, \\ \frac{f'(x_0)}{l'(x_0)} & \text{khi } l'(x_0) \neq 0, \end{cases}, \quad m = f(x_0) - kl(x_0).$$

Nếu với mọi $x \in I$ ta luôn có $f(x) \geq k.l(x) + m$ thì bất đẳng thức (1) là đúng cho hàm số f tại x_0 .

Chứng minh. Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n f(x_j) &\geq \sum_{j=1}^n (k.l(x_j) + m) \\ &= k \sum_{j=1}^n l(x_j) + mn \\ &= n(kl(x_0) + m) = nf(x_0), \end{aligned}$$

điều này kéo theo bất đẳng thức (1). □

Cũng theo Định lý 1, bất đẳng thức Jensen là đúng tại điểm x_0 với một hàm f bất kì có thể lồi hoặc không lồi, nhưng có đồ thị nằm trên tiếp tuyến tại điểm x_0 .

Vậy để sử dụng phương pháp này. Ta sẽ tìm hàm $g(x) = kl(x) + m$ sao cho bất đẳng thức (1) đúng. Trường hợp này đồ thị hàm $y = g(x)$ sẽ tiếp xúc với đồ thị hàm $y = f(x)$ tại điểm x_0 . Sau đây là một số ví dụ áp dụng và các bài tập tương tự để thấy sự ưu việt của phương pháp trên.

Ví dụ 1. ([2]) Cho a, b, c, d, e là các số không âm thỏa mãn

$$\frac{1}{4+a} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{4+c} + \frac{1}{4+d} + \frac{1}{4+e} = 1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{4+a^2} + \frac{b}{4+b^2} + \frac{c}{4+c^2} + \frac{d}{4+d^2} + \frac{e}{4+e^2} \leq 1. \quad (2)$$

Chứng minh. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{x}{4+x^2}, \quad g(x) = \frac{k}{4+x} + m,$$

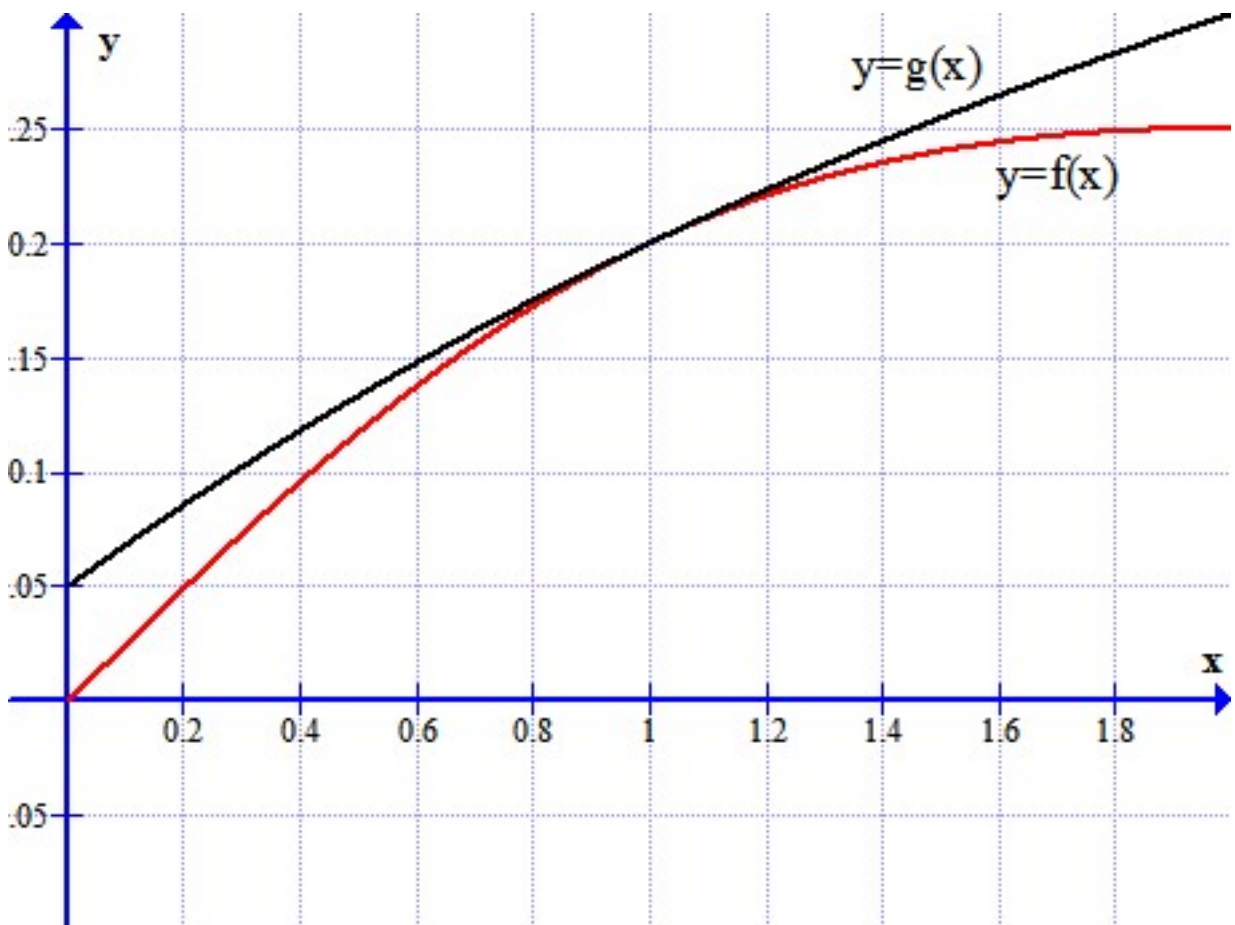
với $x \geq 0$ và các số k và m thỏa mãn $f(1) = g(1), f'(1) = g'(1)$. Suy ra $k = -3, m = \frac{4}{5}$. Vì bất đẳng thức

$$\frac{x}{4+x^2} \leq \frac{4}{5} - \frac{3}{4+x}$$

tương đương với bất đẳng thức

$$(x-1)^2(x+1) \geq 0$$

nên nó $x \geq 0$. Ta có thể quan sát điều này thông qua hình vẽ sau



Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{a}{4+a^2} + \frac{b}{4+b^2} + \frac{c}{4+c^2} + \frac{d}{4+d^2} + \frac{e}{4+e^2} \\ & \leq 4 - 3 \left(\frac{1}{4+a} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{4+c} + \frac{1}{4+d} + \frac{1}{4+e} \right) = 1. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này cho ta bất đẳng thức cần chứng minh. \square

2 Một số bài toán áp dụng

Bài 1. [3] Cho a, b, c và d là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} + \sqrt{1-d} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}.$$

Chứng minh. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$, $g(x) = kx^2 + m$ với $x \in (0, 1)$. Chú ý rằng với $a = b = c = d = \frac{1}{2}$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Ta tìm k, m thỏa mãn $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$ và $f'\left(\frac{1}{2}\right) = g'\left(\frac{1}{2}\right)$. Suy ra k, m thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 0 & = \frac{k}{4} + m \\ -\sqrt{2} & = k \end{cases}.$$

Suy ra $g(x) = -\sqrt{2}\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$.

Ta chứng minh rằng với mọi $x \in (0, 1)$

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{x} \geq -\sqrt{2}\left(x^2 - \frac{1}{4}\right). \quad (3)$$

Thật vậy, bất đẳng thức (3) tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{1-2x}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}} \geq \frac{(1-2x)(1+2x)}{2\sqrt{2}} \\ & \Leftrightarrow \frac{(1-2x)(2\sqrt{2} - (1+2x)(\sqrt{1-x} + \sqrt{x}))}{2\sqrt{2}(\sqrt{1-x} - \sqrt{x})} \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (1-2x) \left(2\sqrt{2} - (1+2x) \left(\frac{1-2x}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}} + 2\sqrt{x} \right) \right) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (1-2x) \left(\frac{2x-1}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}}(1+2x) + 2(\sqrt{2} - \sqrt{x} - 2x\sqrt{x}) \right) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (1-2x) \left(\frac{2x-1}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}}(1+2x) + 2(1-\sqrt{2x})(\sqrt{2x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}) \right) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (1-\sqrt{2x})^2(1+\sqrt{2x}) \left(2(\sqrt{2x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}) - \frac{(1+\sqrt{2x})(1+2x)}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}} \right) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (1-\sqrt{2x})^2(1+\sqrt{2x}) \left(2(\sqrt{2x} + \sqrt{x} + \sqrt{2})\sqrt{1-x} + \sqrt{2x} - 1 \right) \geq 0, \end{aligned}$$

bất đẳng thức cuối đúng với mọi $x \in (0, 1)$ vì

$$\sqrt{2}(\sqrt{1-x} + \sqrt{x}) \geq \sqrt{2}\sqrt{1-x+x} = \sqrt{2} > 1.$$

Vậy bất đẳng thức (3) đúng. Áp dụng với x bằng a, b, c, d ta được

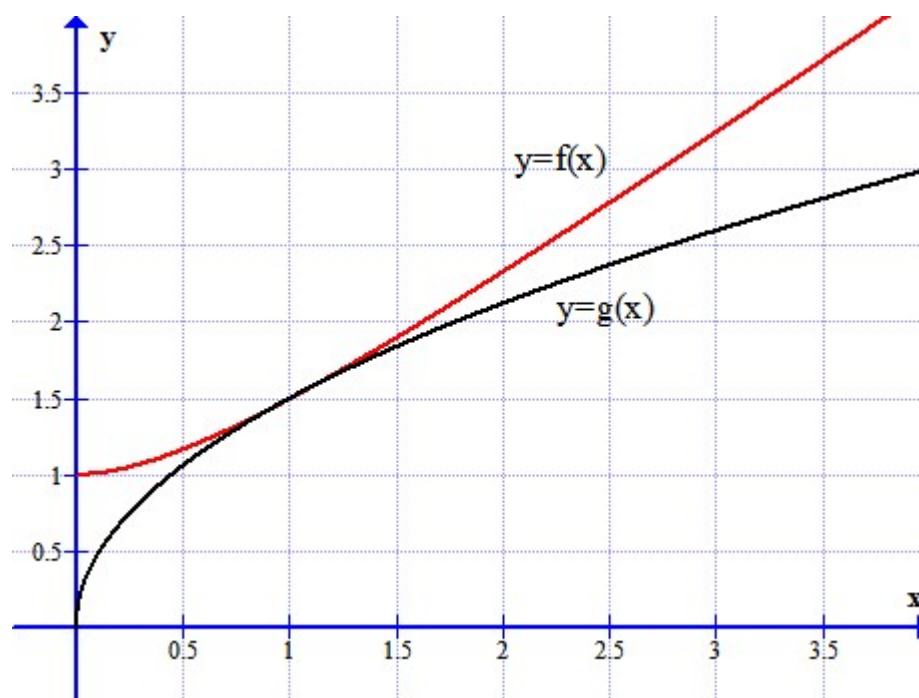
$$\begin{aligned} & \sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} + \sqrt{1-d} - \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d} \\ & \geq -\sqrt{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. \square

Bài 2. (Chetkovski, 2012: 187, bài toán 37) Cho a, b và c là các số thực dương thỏa mãn $abc \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{1}{a+1}\right) \left(b + \frac{1}{b+1}\right) \left(c + \frac{1}{c+1}\right) \geq \frac{27}{8}.$$

Chứng minh. Xét các hàm số $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$, $g(x) = kx^m$ với $x > 0$. Chú ý rằng với $a = b = c = 1$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức vì vậy ta tìm k, m thỏa mãn $f(1) = g(1)$, $f'(1) = g'(1)$. Suy ra $k = \frac{3}{2}$ và $m = \frac{1}{2}$.



Ta chứng minh $f(x) \geq g(x)$ với mọi $x > 0$. Thấy vậy

$$x + \frac{1}{1+x} \geq \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2(2x + \sqrt{x} + 2) \geq 0.$$

Bất đẳng thức sau đúng với mọi $x > 0$. Áp dụng với x bằng a, b, c ta được

$$\left(a + \frac{1}{a+1}\right) \left(b + \frac{1}{b+1}\right) \left(c + \frac{1}{c+1}\right) \geq \frac{27}{8} \sqrt{abc} \geq \frac{27}{8}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. \square

Bài 3. [3] Cho a, b và c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

$$(a^7 - a^4 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^4 - c + 3) \geq 27.$$

Chứng minh. Xét các hàm số $f_1(x) = x^7 - a^4 + 3$, $f_2(x) = x^5 - b^2 + 3$, $f_3(x) = x^4 - x^2 + 3$, $g_1(x) = k_1x^3 + m_1$, $g_2(x) = k_2x^3 + m_2$, $g_3(x) = k_3x^3 + m_3$ với $x > 0$. Chú ý rằng với $a = b = c = 1$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Ta chọn các $k_1, m_1, k_2, m_2, k_3, m_3$ thỏa mãn $f_i(1) = g_i(1)$, $f'_i(1) = g'_i(1)$ với $i = 1, 2, 3$. Từ $f_i(1) = 3$ và $f'_i(1) = 3$ ta suy ra

$$g_1(x) = g_2(x) = g_3(x) = x^3 + 2.$$

Từ các bất đẳng thức $(x-1)^2(x^2+x+1) \geq 0$ và $(x-1)^2(x^2+x+1)(x+1) \geq 0$ đúng với mọi $x > 0$ ta suy ra bất đẳng thức sau là đúng

$$x^7 - x^5 + 3 \geq x^5 - x^2 + 3 \geq x^4 - x + 3 \geq x^3 + 2.$$

Mặt khác ta có

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$

suy ra

$$\begin{aligned} (a^7 - a^4 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^4 - c + 3) &\geq (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) \\ &= (a^3 + 1^3 + 1^3)(1^3 + b^3 + 1^3)(1^3 + 1^3 + c^3) \geq (a+b+c)^3 \\ &\geq (3(ab+bc+ca))^{\frac{3}{2}} = 27. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. □

Bài 4. [3] Cho a, b và c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

$$(a^7 - a^4 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^4 - c + 3) \geq 27.$$

Chứng minh. Xét các hàm số $f_1(x) = x^7 - a^4 + 3$, $f_2(x) = x^5 - b^2 + 3$, $f_3(x) = x^4 - x^2 + 3$, $g_1(x) = k_1x^3 + m_1$, $g_2(x) = k_2x^3 + m_2$, $g_3(x) = k_3x^3 + m_3$ với $x > 0$. Chú ý rằng với $a = b = c = 1$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Ta chọn các $k_1, m_1, k_2, m_2, k_3, m_3$ thỏa mãn $f_i(1) = g_i(1)$, $f'_i(1) = g'_i(1)$ với $i = 1, 2, 3$. Từ $f_i(1) = 3$ và $f'_i(1) = 3$ ta suy ra

$$g_1(x) = g_2(x) = g_3(x) = x^3 + 2.$$

Từ các bất đẳng thức $(x-1)^2(x^2+x+1) \geq 0$ và $(x-1)^2(x^2+x+1)(x+1) \geq 0$ đúng với mọi $x > 0$ ta suy ra bất đẳng thức sau là đúng

$$x^7 - x^5 + 3 \geq x^5 - x^2 + 3 \geq x^4 - x + 3 \geq x^3 + 2.$$

Mặt khác ta có

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$

suy ra

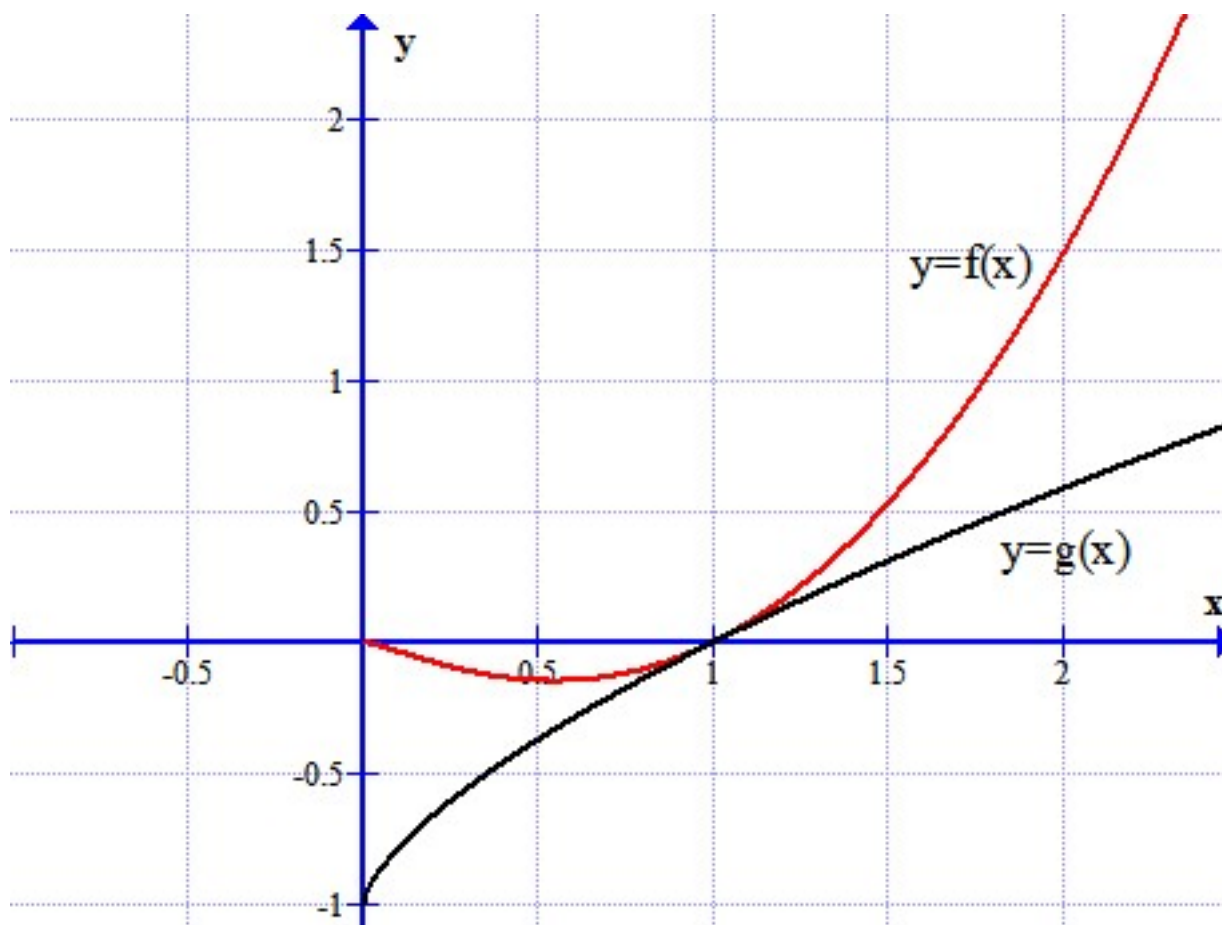
$$\begin{aligned} (a^7 - a^4 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^4 - c + 3) &\geq (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) \\ &= (a^3 + 1^3 + 1^3)(1^3 + b^3 + 1^3)(1^3 + 1^3 + c^3) \geq (a+b+c)^3 \\ &\geq (3(ab+bc+ca))^{\frac{3}{2}} = 27. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. □

Bài 5. [3] Cho a, b và c là các số thực dương thỏa mãn $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}} = 3$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}.$$

Chứng minh. Xét $f(x) = x^2 - x^{4/3}$, $g(x) = kx^{2/3} + m$, với $x \in (0, \sqrt[3]{9})$. Chú ý rằng với $a = b = c = 1$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Ta chọn k và m thỏa mãn $f(1) = g(1)$, $f'(1) = g'(1)$. Suy ra $k = 1, m = -1$, $g(x) = x^{2/3} - 1$.



Vì bất đẳng thức $x^2 - x^{4/3} \geq x^{2/3} - 1$ tương đương với $(x^{2/3} - 1)^2(x^{2/3} + 1) \geq 0$, suy ra bất đẳng thức đúng. Từ đó ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 - a^{4/3} - b^{4/3} - c^{4/3} \geq a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3} - 3 = 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. □

Bài 6. [4] Cho a, b, c và d là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2 + c^2 + d^2} + \frac{b}{c^2 + d^2 + a^2} + \frac{c}{d^2 + a^2 + b^2} + \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{4}{a + b + c + d}.$$

Chứng minh. Theo bất đẳng thức Cauchy- Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{b^2 + c^2 + d^2} + \frac{b}{c^2 + d^2 + a^2} + \frac{c}{d^2 + a^2 + b^2} + \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2} \right) (a + b + c + d) \\ & \geq \left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2 + c^2 + d^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{c^2 + d^2 + a^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{d^2 + a^2 + b^2}} + \sqrt{\frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}} \right). \end{aligned}$$

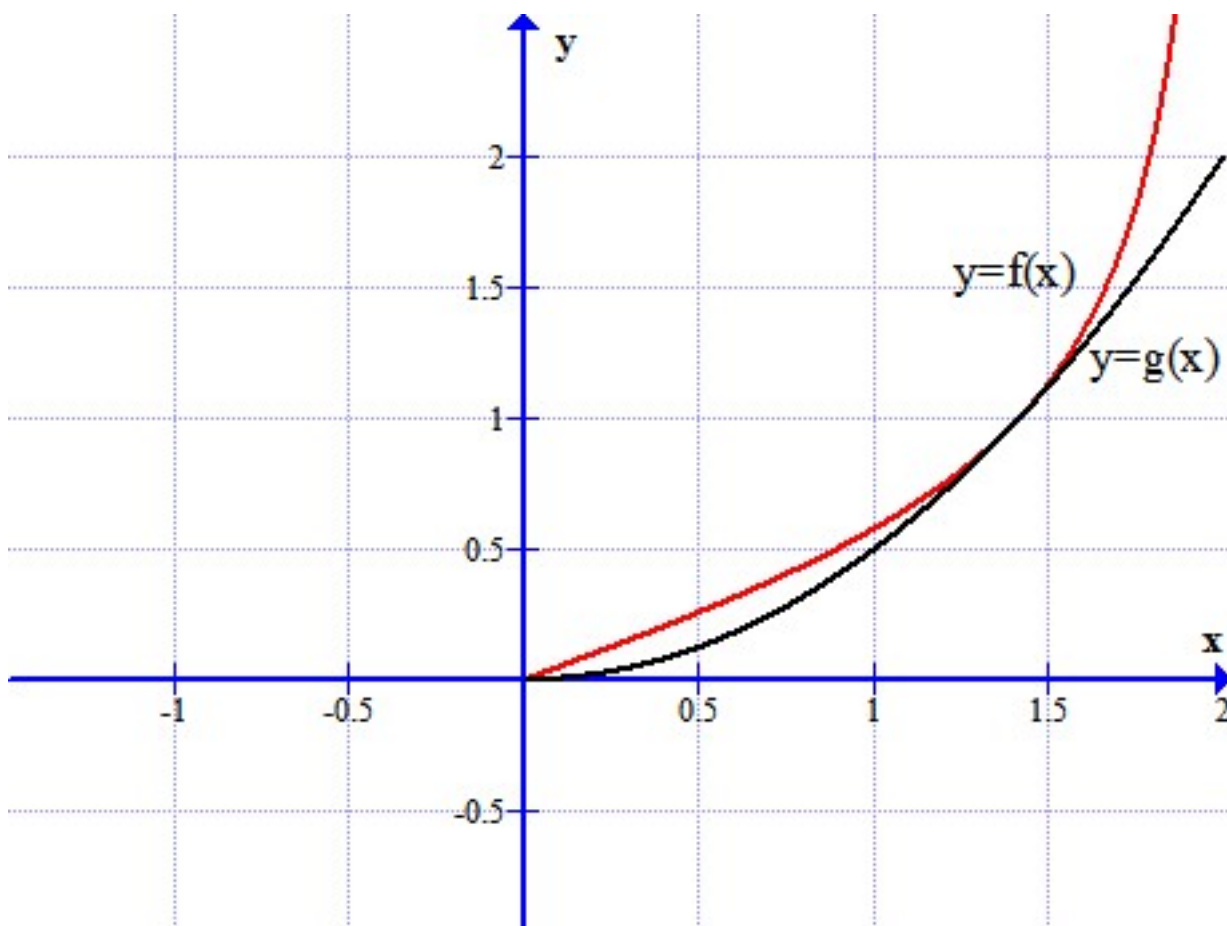
Do đó, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2 + c^2 + d^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{c^2 + d^2 + a^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{d^2 + a^2 + b^2}} + \sqrt{\frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}} \geq 2. \quad (4)$$

Vì đây là bất đẳng thức thuần nhất nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Khi đó bất đẳng thức (4) được viết lại thành

$$\frac{a}{\sqrt{4 - a^2}} + \frac{b}{\sqrt{4 - b^2}} + \frac{c}{\sqrt{4 - c^2}} + \frac{d}{\sqrt{4 - d^2}} \geq 2.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$, $g(x) = kx^2 + m$ với $x \in [0, 2)$. Chú ý rằng với $a = b = \sqrt{2}$, $c = d = 0$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Ta chọn các số k, m thỏa mãn $f(0) = g(0)$, $f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2})$, $f'(\sqrt{2}) = g'(\sqrt{2})$. Suy ra $k = \frac{1}{2}$, $m = 0$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$.



Với mọi $x \in [0, 2)$ ta có bất đẳng thức $\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \geq \frac{x^2}{2}$ đúng vì nó tương đương với $x^2(x^2 - 2)^2 \geq 0$. Áp dụng với x bằng a, b, c, d ta được

$$\frac{a}{\sqrt{4 - a^2}} + \frac{b}{\sqrt{4 - b^2}} + \frac{c}{\sqrt{4 - c^2}} + \frac{d}{\sqrt{4 - d^2}} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2} = 2.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. □

3 Kết luận

Trong bài báo này, bằng việc sử dụng bất đẳng thức Jensen suy rộng, chúng tôi đã đưa ra một phương pháp mới để chứng minh một số lớp các bài toán bất đẳng thức với điều kiện cho trước không tuyến tính. Đó là phương pháp dùng đường cong tiếp xúc. Đây là phương pháp tổng quát của phương pháp tiếp tuyến đã được đưa ra trước đó trong [6] và [7].

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] S. T. Berkolaiko and S. B. Katok, "One inductive method to prove inequalities," *Kvant. N8.*, no. 8, pp. 33-36, 1970.
- [2] Z. Cvetkovski, *Inequalities*, Springer, 2012.
- [3] Z. Cvetkovski, *Inequalities Theorems, Techniques and Selected Problems*. SpringerVerlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [4] K. H. Pham, *Secrets in Inequalities*, Editura Gil, Zalău, 2007.
- [5] O. Izhboldin and L. Kurlyandchik, "Jensen's inequalities," *Kvant. N8.*, vol. 3, pp. 7-10, 2000.
- [6] Y. K. Li, "Using tangent lines to prove Inequalities," *Mathematical Excalibur*, vol. 10, no. 5, pp. 1-4, 2005.
- [7] I. Ibatulin and A. N. Lipes, "Using tangent lines to prove inequalities (Part II)," *Mathematical Excalibur*, vol. 18, no. 5, pp. 1-4, 2014.