

STUDY ON THE STRESS-DEFORMED STATE OF RECTANGULAR PLATE WITH VARIABLE THICKNESS ACCORDING TO THE NON-CLASSICAL THEORY

Doan Quy Hieu

Vietnam-Russia Tropical Center

ARTICLE INFO		ABSTRACT
Received:	19/5/2021	This paper presents a method to calculate the stress-deformed state of a rectangular plate with variable cross-section according to non-classical theory. The equation of state of the plate is built on the basis of the three dimensional elastic theory. Displacements in the direction perpendicular to the mean plane of the plate are represented as polynomials which are 2 orders higher than the classical theory of Kirchhoff-Love. The system of equilibrium equations and the boundary conditions are obtained using the Lagrange variation method. Using Levi's method for an isotropic rectangular plate of variable thickness, a system of differential equations with variable coefficients is obtained. To solve this problem, the author used the finite difference method. Based on the calculation results for rectangular plate whose thickness varies, a comparison of the results obtained by classical and non-classical theory has been made.
Revised:	18/7/2021	
Published:	21/7/2021	
KEYWORDS		
Rectangular plate		
Lagrange variation method		
Finite difference method		
Stress-strain state		
Boundary layer		

NGHIÊN CỨU TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT BIẾN DẠNG TẤM CHỮ NHẬT CÓ ĐỘ DÀY THAY ĐỔI THEO LÝ THUYẾT PHI CỔ ĐIỂN

Doãn Quý Hiếu

Trung tâm Nhiệt đới Việt Nga

THÔNG TIN BÀI BÁO		TÓM TẮT
Ngày nhận bài:	19/5/2021	Bài báo trình bày phương pháp tính trạng thái ứng suất biến dạng của tấm chữ nhật có tiết diện thay đổi theo lý thuyết phi cổ điển. Phương trình trạng thái của tấm được xây dựng trên cơ sở lý thuyết đàn hồi 3 chiều. Các chuyển vị theo hướng vuông góc với mặt phẳng trung bình của tấm được biểu diễn dưới dạng đa thức, cao hơn 2 bậc so với lý thuyết cổ điển của Kirchhoff-Love. Hệ phương trình cân bằng và các điều kiện biên thu được bằng cách sử dụng phương pháp biến phân Lagrange. Sử dụng phương pháp Levi cho tấm chữ nhật đẳng hướng có độ dày thay đổi, thu được hệ phương trình vi phân với các hệ số thay đổi. Để giải bài toán này, tác giả đã sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn. Dựa trên kết quả tính toán cho tấm chữ nhật có độ dày thay đổi, đã đưa ra so sánh kết quả thu được bằng lý thuyết cổ điển và phi cổ điển.
Ngày hoàn thiện:	18/7/2021	
Ngày đăng:	21/7/2021	
TỪ KHÓA		
Tấm chữ nhật		
Phương pháp biến phân Lagrange		
Phương pháp sai phân hữu hạn		
Trạng thái ứng suất biến dạng		
Lớp biên		

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.4521>

Email: dqhieu57@gmail.com

<http://jst.tnu.edu.vn>

124

Email: jst@tnu.edu.vn

1. Giới thiệu

Những năm gần đây, việc nghiên cứu trạng thái ứng suất biến dạng (TTUSBD) của tấm vỏ tại lớp biên (các vị trí cạnh ngàm, tải trọng tập trung, tải trọng cục bộ) đang được quan tâm nghiên cứu ở nhiều nước trên thế giới. Các chi tiết dạng tấm, vỏ có độ dày thay đổi thường được sử dụng rộng rãi trong các lĩnh vực chế tạo máy như ô tô, hàng không, tàu biển... Do đó, nhiệm vụ nâng cao độ chính xác khi tính toán TTUSBD của tấm và vỏ có tính cấp thiết cao. Việc tính toán TTUSBD tại các vùng biên cho phép đánh giá độ bền kết cấu tại các vị trí nguy hiểm, giúp cho việc lựa chọn vật liệu, phương án thiết kế sản phẩm được tối ưu.

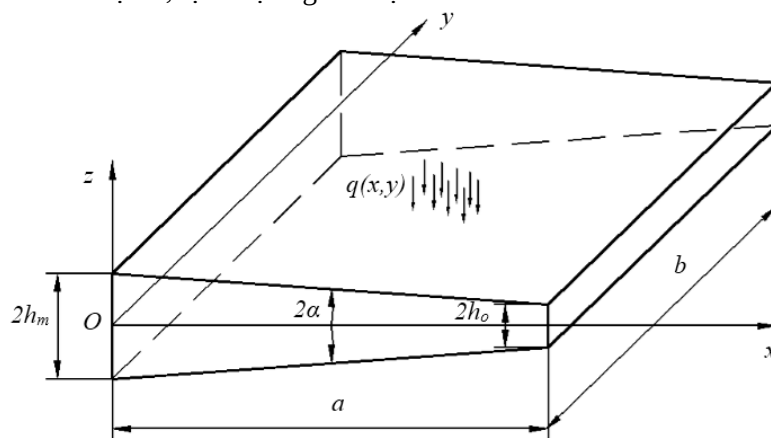
Lý thuyết cổ điển dùng để tính toán TTUSBD của tấm vỏ đã được trình bày trong nhiều tài liệu trong và ngoài nước. Các phương pháp tính cho các hình dạng tấm, vỏ khác nhau có thể tìm thấy trong tài liệu của Nga [1]. Tuy nhiên, với sự phát triển của khoa học ngày nay, việc tính toán bằng lý thuyết cổ điển cho thấy nhiều hạn chế, do sử dụng nhiều giả thiết, độ chính xác chưa cao. Sử dụng lý thuyết phi cổ điển để tính toán TTUSBD của tấm vỏ cũng đã được nghiên cứu từ lâu và có nhiều hướng khác nhau như của Goldenveizer, Vasiliev, Lurie [2]... Trong các công trình của V.V. Firsanov đã xây dựng lý thuyết chính xác hóa để tính toán TTUSBD của tấm vỏ bằng phương pháp biến phân - tiệm cận [3], [4]. Kết quả các nghiên cứu đó chỉ ra rằng, tại các vùng gần biên như vị trí ngàm chặt, ứng suất bổ sung “lớp biên” có cùng bậc so với ứng suất pháp lớn nhất.

Các hướng tiếp cận khác bằng phương pháp phi cổ điển có thể kể đến trong các tài liệu [5]-[7]. Ứng dụng các phương pháp số như sai phân hữu hạn để giải các hệ phương trình phức tạp có hệ số thay đổi được đề cập trong các tài liệu [8], [9]. Trạng thái ứng suất biên của tấm chữ nhật có chiều dày thay đổi dưới tác dụng của tải trọng cục bộ được giới thiệu trong [10].

Bài báo này trình bày phương pháp xây dựng hệ phương trình cân bằng của tấm chữ nhật dựa trên cơ sở phương pháp biến phân Lagrange và phân tích các chuyển vị theo độ dày của tấm. Phương pháp này không chỉ áp dụng cho tấm mỏng mà có thể áp dụng cho các loại tấm có độ dày trung bình. Mô hình tính toán được thực hiện cho tấm chữ nhật đẳng hướng có độ dày thay đổi, chịu tải trọng phân bố. Dựa trên kết quả tính toán, đã đưa ra so sánh kết quả thu được bằng lý thuyết cổ điển và phi cổ điển.

2. Hệ phương trình cân bằng của tấm theo lý thuyết phi cổ điển

Nghiên cứu tấm chữ nhật có độ dày thay đổi, chịu tải trọng theo phương thẳng đứng $q(x, y)$ trong hệ tọa độ Đề các $Oxyz$. Ký hiệu a và b là chiều dài và chiều rộng, $2h$ – là độ dày thay đổi của tấm. Độ dày của tấm thay đổi theo trục Ox như Hình 1. Các trục Ox , Oy nằm trên mặt phẳng trung bình của tấm, còn trục Oz vuông góc với mặt phẳng trung bình. Các cạnh của tấm $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ có thể tự do, tựa hoặc ngàm chặt.



Hình 1. Tấm chữ nhật có độ dày thay đổi

Theo tài liệu [2], sử dụng xấp xỉ sau đối với trường chuyển vị của tấm:

$$\begin{aligned}
U_1(x, y, z) &= u_0(x, y) + u_1(x, y)z + u_2(x, y)\frac{z^2}{2!} + u_3(x, y)\frac{z^3}{3!}, \\
U_2(x, y, z) &= v_0(x, y) + v_1(x, y)z + v_2(x, y)\frac{z^2}{2!} + v_3(x, y)\frac{z^3}{3!}, \\
U_3(x, y, z) &= w_0(x, y) + w_1(x, y)z + w_2(x, y)\frac{z^2}{2!}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Phương trình hình học theo lý thuyết đàn hồi 3 chiều có dạng:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \partial U_1 / \partial x, \quad \varepsilon_y = \partial U_2 / \partial y, \quad \gamma_{xy} = \partial U_1 / \partial y + \partial U_2 / \partial x, \\
\gamma_{xz} &= \partial U_1 / \partial z + \partial U_3 / \partial x, \quad \gamma_{yz} = \partial U_2 / \partial z + \partial U_3 / \partial y, \quad \varepsilon_z = \partial U_3 / \partial z.
\end{aligned} \tag{2}$$

Thay (1) vào (2) thu được các biểu thức biến dạng của tấm như sau:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \sum_{i=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{z^i}{i!}, \quad \varepsilon_y = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{z^i}{i!}, \quad \gamma_{xy} = \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \frac{z^i}{i!}, \quad \varepsilon_z = w_1 + w_2 z, \\
\gamma_{xz} &= \left(u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \left(u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) z + \left(u_3 + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \frac{z^2}{2!}, \\
\gamma_{yz} &= \left(v_1 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \left(v_2 + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) z + \left(v_3 + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \frac{z^2}{2!}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Ứng suất của tấm được tính theo các biểu thức:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z, \quad \sigma_y = A_{21}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\varepsilon_z, \\
\tau_{xy} &= A_{44}\gamma_{xy}, \quad \sigma_z = A_{31}\varepsilon_x + A_{32}\varepsilon_y + A_{33}\varepsilon_z, \quad \tau_{xz} = A_{55}\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = A_{66}\gamma_{yz},
\end{aligned} \tag{4}$$

Trong đó, các hệ số A_{ij} ($i=1,6, j=1,6$) là các hằng số đàn hồi của tấm.

Hệ phương trình vi phân cân bằng của tấm thu được trên cơ sở phương pháp biến phân Lagrange:

$$\delta U - \delta A = 0, \tag{5}$$

Trong đó, δU là biến phân thế năng biến dạng:

$$\delta U = \iiint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy dz \tag{6}$$

và δA - biến phân công của ngoại lực:

$$\delta A = \iint q(x, y) \delta \left[w_0(x, y) + w_1(x, y)hS_1 + w_2(x, y)\frac{h^2}{2}S_2 \right] dx dy \tag{7}$$

Thay các biểu thức (6), (7) vào (5) kết hợp với (1), (3) và (4), thu được hệ phương trình cân bằng của tấm theo lý thuyết phi cổ điển:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} &= p_z^0, \\
\frac{\partial M_x^i}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^i}{\partial y} - H_{xz}^i &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\
\frac{\partial M_y^i}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^i}{\partial x} - H_{yz}^i &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\
\frac{\partial M_{xz}^1}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^1}{\partial y} - H_z^1 &= p_z^1,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{\partial M_{xz}^2}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^2}{\partial y} - H_z^2 = p_z^2.$$

Trong đó sử dụng các nội lực sau:

$$\begin{aligned}(N_x, N_y, N_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}) &= \int_{-h}^{+h} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \\ (M_x^i, M_y^i, M_{xy}^i, M_{xz}^i, M_{yz}^i) &= \int_{-h}^{+h} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \frac{z^i}{i!} dz, \\ (H_{xz}^i, H_{yz}^i, Q_z^i) &= \int_{-h}^{+h} (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z) \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz, \quad p_z^i = qh^i / i!,\end{aligned}$$

Các điều kiện biên tương ứng tại cạnh $x=0, x=a$ của tấm như sau:

$$\begin{aligned}N_x &= \bar{N}_x \vee u_0 = \bar{u}_0, \quad N_{xy} = \bar{N}_{xy} \vee v_0 = \bar{v}_0, \quad Q_{xz} = \bar{Q}_{xz} \vee w_0 = \bar{w}_0, \\ M_x^i &= \bar{M}_x^i \vee u_i = \bar{u}_i, \quad M_{xy}^i = \bar{M}_{xy}^i \vee v_i = \bar{v}_i, \quad i=1,2,3, \\ M_{xz}^i &= \bar{M}_{xz}^i \vee w_i = \bar{w}_i, \quad i=1,2;\end{aligned} \quad (9)$$

Tại cạnh $y=0, y=b$:

$$\begin{aligned}N_{xy} &= \bar{N}_{xy} \vee u_0 = \bar{u}_0, \quad N_y = \bar{N}_y \vee v_0 = \bar{v}_0, \quad Q_{yz} = \bar{Q}_{yz} \vee w_0 = \bar{w}_0, \\ M_{xy}^i &= \bar{M}_{xy}^i \vee u_i = \bar{u}_i, \quad M_y^i = \bar{M}_y^i \vee v_i = \bar{v}_i, \quad i=1,2,3, \\ M_{yz}^i &= \bar{M}_{yz}^i \vee w_i = \bar{w}_i, \quad i=1,2;\end{aligned} \quad (10)$$

Trong đó ký hiệu gạch trên đầu là các ngoại lực tác động lên cạnh của tấm.

Để thấy các điều kiện biên (9), (10) thể hiện được tất cả các trường hợp biên của tấm như tự do, tựa và ngàm chặt, số lượng điều kiện biên cũng tương ứng với bậc của hệ phương trình cân bằng (8). Do đó, hệ (8) là hệ kín và có thể giải được bằng phương pháp số.

Giải hệ phương trình (8) với các điều kiện biên (9), (10), thu được các chuyển vị của tấm. Các ứng suất xác định bằng các biểu thức (3), (4), còn ứng suất cắt theo tài liệu [3], [4] thu được bằng cách tích phân hệ phương trình cân bằng lý thuyết đàn hồi:

$$\tau_{xz} = - \int_{-h}^z \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz, \quad \tau_{yz} = - \int_{-h}^z \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz, \quad \sigma_z = - \int_{-h}^z \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dz.$$

3. Hệ phương trình vi phân thuần nhất cho bài toán biên

Khảo sát tấm chữ nhật đẳng hướng, độ dày $h(x)$, trong đó $-h \leq z \leq h$, tọa độ $z=0$ tương ứng với mặt phẳng trung bình của tấm. Bề dày $h(x)$ nhỏ so với các kích thước khác của tấm như chiều dài, chiều rộng. Tiếp theo, giả sử tấm chữ nhật trên Hình 1 có biên tựa tại các cạnh $y=0, y=b$, khi đó tải trọng và chuyển vị của tấm được biểu diễn dưới dạng chuỗi lượng giác.

$$\begin{aligned}q(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(x) \sin(\psi_m y), \quad u_i(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{im}(x) \sin(\psi_m y), \\ v_i(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_{im}(x) \cos(\psi_m y), \quad w_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{jm}(x) \sin(\psi_m y), \quad i=0,3, \quad j=0,2,\end{aligned} \quad (11)$$

Trong đó, $\psi_m = m\pi / b$. Thay (11) vào hệ phương trình cân bằng (8) và điều kiện biên (9), (10), thu được hệ phương trình vi phân thuần nhất đối với các hàm chuyển vị U_{im}, V_{im}, W_{jm} ,

$i = \overline{0,3}, j = \overline{0,2}, m = \overline{1,2,3,\dots}$ và các điều kiện biên tương ứng. Hệ phương trình cân bằng của tấm chữ nhật sau khi biến đổi có dạng như sau:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^3 \left(K_l^{us0} + K_l^{us11} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_l^{us22} \right) U_{sm}(x) - \sum_{s=0}^3 \psi K_l^{vs12} \frac{d}{dx} V_{sm}(x) + \\ & + K_l^{w01} \frac{d}{dx} W_{0m}(x) + K_l^{w11} \frac{d}{dx} W_{1m}(x) + K_l^{w21} \frac{d}{dx} W_{2m}(x) = 0, \quad l = \overline{1,2,3,4}, \\ & \sum_{s=0}^3 \psi K_i^{us12} \frac{d}{dx} U_{sm}(x) + \sum_{s=0}^3 \left(K_i^{vs0} + K_i^{vs11} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_i^{vs22} \right) V_{sm}(x) - \\ & + K_i^{w02} \psi W_{0m}(x) + K_i^{w12} \psi W_{1m}(x) + K_i^{w22} \psi W_{2m}(x) = 0, \quad i = \overline{5,6,7,8}, \\ & \sum_{s=0}^3 K_j^{us1} \frac{d}{dx} U_{sm}(x) - \sum_{s=0}^3 \psi K_j^{vs2} V_{sm}(x) + \left(K_j^{w00} + K_j^{w011} \frac{d^2}{dx^2} - \right. \\ & \left. - \psi^2 K_j^{w022} \right) W_{0m}(x) + \left(K_j^{w10} + K_j^{w111} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_j^{w122} \right) W_{1m}(x) + \\ & + \left(K_j^{w20} + K_j^{w211} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_j^{w222} \right) W_{2m}(x) = K_j^{q33} Q_m, \quad j = \overline{9,10,11}. \end{aligned} \quad (12)$$

Ở đây các hệ số K với ký hiệu trên và dưới là các tham số thay đổi, phụ thuộc vào độ dày tấm và các hằng số đàn hồi của tấm. Trong khuôn khổ bài báo không đưa ra các biểu thức hệ số K vì sự phức tạp và cồng kềnh của chúng. Đối với tấm chữ nhật có độ dày không đổi, thì các hệ số K là hằng số, hệ phương trình vi phân có thể giải bằng phép biến đổi Laplace. Tuy nhiên, trong trường hợp tấm có độ dày thay đổi, các hệ số K là hàm số thay đổi, do đó ta sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn để giải hệ phương trình vi phân (12). Ưu điểm của phương pháp sai phân hữu hạn trong trường hợp này là tại các vị trí gần biên, có thể tăng số lượng các điểm chia, giúp cho độ chính xác đạt được cao hơn. Chương trình tính toán được lập trình bằng phần mềm Maple.

4. Tính toán trạng thái ứng suất của tấm dưới ảnh hưởng tải trọng phân bố

Khảo sát tấm có độ dày thay đổi, chịu ảnh hưởng của tải trọng phân bố $q(x, y) = Q_0 \sin(\pi y)$, trong đó $Q_0 = \text{const}$. Các thành phần chuyển vị và ứng suất của tấm xác định theo số hạng thứ nhất của chuỗi (11). Các cạnh $x=0, x=a$ của tấm được ngàm chặt. Kích thước chiều dài, chiều rộng của tấm là: $a = b = 1 \text{ (m)}$, $h_0 = 0,005 \text{ (m)}$, $h_m = 0,05 \text{ (m)}$, độ dày tấm xác định theo công thức:

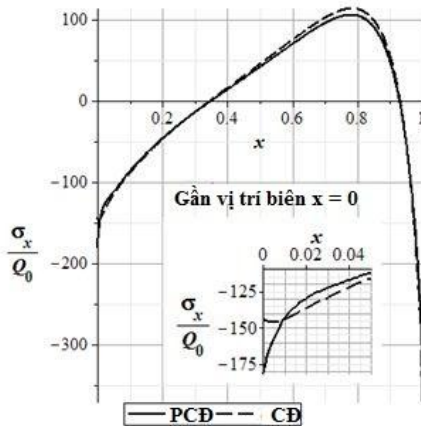
$$h(x) = h_m - tg(\alpha) \cdot x,$$

Trong đó, $tg(\alpha) = (h_m - h_0) / a$, 2α – góc nghiêng của tấm (Hình 1).

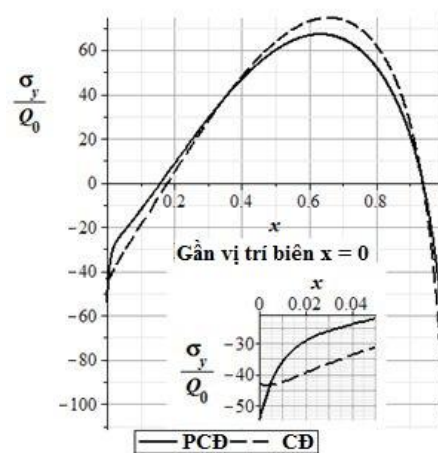
Hệ số Poisson $\mu = 0,3$, mô đun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$. Kết quả tính ứng suất của tấm theo lý thuyết phi cổ điển được thể hiện trên đồ thị Hình 2-5. Trên các hình này, ký hiệu “PCĐ” tương ứng với lý thuyết phi cổ điển và “CĐ” tương ứng với lý thuyết cổ điển.

Phân tích các kết quả thu được, nhận thấy ngoài vùng biên, các giá trị ứng suất thu được theo lý thuyết cổ điển và phi cổ điển hầu như trùng với nhau (Hình 2). Điều này khẳng định được độ chính xác của phương pháp phi cổ điển. Sai khác giữa các kết quả ngoài vùng biên lớn nhất là trên Hình 3, ứng suất σ_y theo hai lý thuyết chênh lệch nhau 10% tại vị trí $x = 0,7 \text{ m}$. Khi xác định trạng thái ứng suất của tấm theo phương pháp phi cổ điển, ứng suất tại lớp biên có sự thay đổi: ứng suất σ_x, σ_y tăng thêm khoảng 26,3% tại vị trí biên $x = 0$ (Hình 2, 3). Ứng suất σ_z , theo lý thuyết phi cổ điển, tại vùng biên có cùng bậc với ứng suất σ_x (Hình 4). Ở đây chú ý là,

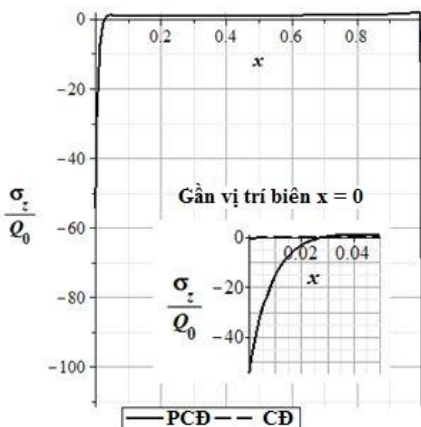
ứng suất σ_z theo lý thuyết cổ điển được bỏ qua, coi như bằng 0, còn theo lý thuyết phi cổ điển đạt khoảng 30% giá trị ứng suất σ_x (Hình 2, 4). Đồ thị biểu diễn sự thay đổi của các ứng suất σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xz} theo độ dày tấm (theo trục Oz) trên cạnh $x = 0$ thể hiện trên Hình 5.



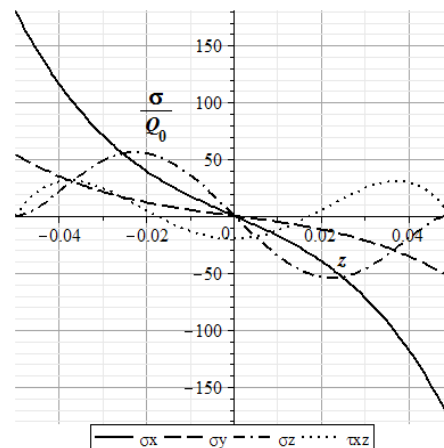
Hình 2. Đồ thị σ_x theo chiều dài



Hình 3. Đồ thị σ_y theo chiều dài



Hình 4. Đồ thị σ_z theo chiều dài



Hình 5. Đồ thị σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xz} theo độ dày tấm tại cạnh $x = 0$ theo phương pháp PCĐ

5. Kết luận

Trên cơ sở tính toán lý thuyết và ví dụ cụ thể trình bày trong công trình này, có thể rút ra những kết luận chủ yếu sau:

1. Sử dụng phương pháp biến phân Lagrange và phân tích các thành phần chuyển vị của tấm dưới dạng đa thức, cao hơn 2 bậc so với lý thuyết cổ điển, đã xây dựng được bài toán biên xác định TTUSBD của tấm chữ nhật có độ dày thay đổi.

2. Đưa ra so sánh kết quả tính toán TTUSBD của tấm theo lý thuyết cổ điển và phi cổ điển. Tại vùng lân cận biên, các ứng suất pháp σ_x và σ_y có sự thay đổi, tăng thêm khoảng 26,3% so với lý thuyết cổ điển. Giá trị ứng suất pháp cắt σ_z có cùng bậc với các ứng suất pháp khác (xấp xỉ bằng 30% ứng suất pháp cực đại σ_x).

3. Dựa vào kết quả tính toán, cần phải sử dụng lý thuyết phi cổ điển bậc cao để tính toán TTUSBD của tấm có tiết diện thay đổi. Kết quả nghiên cứu có ý nghĩa quan trọng, vì đã đánh giá

chính xác hơn các thành phần ứng suất của các chi tiết, phần tử kết cấu khi tính toán, thiết kế trong lĩnh vực cơ khí - động lực, chế tạo máy.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] S. P. Timoshenko and S. Voinovsky-Krieger, *Plates and shells*, (in Russian), Moscow, 1966, p. 636.
- [2] V. V. Vasiliev and S. A. Lurie, "On the problem of constructing a non-classical theory of plates," (in Russian), *Izv. AN. MTT*, no. 2, pp. 158-167, 1990.
- [3] V. V. Firsanov and T. N. Doan, "Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory," *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, Begell House, INC, vol. 6, no. 2, pp. 135-166, 2015.
- [4] V. V. Firsanov, "The stressed state of the "boundary layer" type cylindrical shells investigated according to a nonclassical theory," *Journal of machinery, manufacture and reliability*, vol. 47, no. 3, pp. 241-248, 2018.
- [5] E. M. Zveryaev, "Constructive theory of thin elastic shells," (in Russian), *M.V. Keldysh*, no. 33, p. 25, 2016, doi: 10.20948/prepr-2016-33. [Online]. Available: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-33>. [Accessed Apr. 10, 2021]
- [6] A. Dicarlo, P. P. Guidugli, and W. O. Williams, "Shells with thickness distension," *Int. J. Solid and Structures*, vol. 38, no. 6-7, pp. 1201-1225, 2001.
- [7] G. Jaiani, "Differential hierarchical models for elastic prismatic shells with microtemperatures," *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 95, no. 1, pp. 77-90, 2015.
- [8] Roknuzzaman Md, Hossain Md, Haque Md, Rashedul, Ahmed Dr, "Analysis of Rectangular Plate with Opening by Finite Difference Method," *American Journal of Civil Engineering and Architecture*, vol. 3, pp. 165-173, 2015, doi: 10.12691/ajcea-3-5-3.
- [9] P. Katarina, H. Marko, and B. Zlatko, "Finite difference solution of plate bending using Wolfram Mathematica," *Tehnički glasnik*, vol. 13, pp. 241-247, 2019, doi: 10.31803/tg-20190328111708.
- [10] Q. H. Doan and V. V. Firsanov, "Edge stress state of a rectangular plate with variable thickness based on a refined theory," (in Russian), *MAI Proceedings*, Moscow, no. 110, 2020. doi: 10.34759/trd-2020-110-10.