

NEWTON - KRYLOV - NEDZHIBOV METHOD SOLUTIONS TO A SYSTEM OF NONLINEAR EQUATIONS WITH QUADRATIC CONVERGENCE RATE

Lai Van Trung, Quach Thi Mai Lien*

TNU - University of Information and Communication Technology

ARTICLE INFO		ABSTRACT
Received:	22/3/2023	Many problems in practical and engineering applications lead to finding solutions to a system of nonlinear equations with large numbers of variables and equations. The problem of finding the exact solution to a system of nonlinear equations is not always feasible, especially for large-scale systems. Therefore, finding approximate solutions to this class of equations is great importance. Since the appearance of the Newton's method, there have been many methods proposed by scientists to address this issue with the support of computer software. Research and development of improved methods for this algorithm are always of interest and focus for scientists. In this paper, we investigate the problem of finding approximate solutions to a system of nonlinear equations using the Newton-Krylov-Nedzhibov method. The convergence of the iterative method can only be confirmed through practical experiments. Using the properties of Krylov space and the properties of the mapping that satisfies the Lipschitz condition, we prove the convergence of the method. Moreover, we present the solution to a nonlinear equation system using Matlab software.
Revised:	05/5/2023	
Published:	05/5/2023	
KEYWORDS		
Iterative formula		
Quaternary convergence		
Nonlinear equations system		
Third-order Newton-Krylov method		
Newton-Krylov-Nedzhibov method		

PHƯƠNG PHÁP NEWTON – KRYLOV- NEDZHIBOV GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN VỚI TỐC ĐỘ HỘI TỤ BẬC BỐN

Lại Văn Trung, Quách Thị Mai Liên*

Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông – ĐH Thái Nguyên

THÔNG TIN BÀI BÁO		TÓM TẮT
Ngày nhận bài:	22/3/2023	Nhiều bài toán trong thực tế và trong kỹ thuật thường dẫn đến việc tìm nghiệm của một hệ phương trình phi tuyến với số ẩn và số phương trình lớn. Vấn đề tìm nghiệm chính xác của hệ phương trình phi tuyến không phải lúc nào cũng thực hiện được, đặc biệt là lớp các hệ phương trình có số ẩn và số phương trình lớn. Vì vậy, việc tìm nghiệm gần đúng lớp các hệ phương trình này là rất cần thiết. Kể từ khi phương pháp Newton xuất hiện đã có rất nhiều phương pháp được các nhà khoa học đưa ra để giải quyết vấn đề này dưới sự hỗ trợ của các phần mềm máy tính. Việc nghiên cứu và đưa ra các phương pháp cải tiến cho thuật toán này luôn được các nhà khoa học quan tâm, nghiên cứu. Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu việc tìm nghiệm gần đúng của hệ phương trình phi tuyến bằng phương pháp Newton-Krylov-Nedzhibov. Sự hội tụ của phương pháp lặp chỉ được khẳng định bằng thực nghiệm. Bằng cách sử dụng các tính chất của không gian Krylov và các tính chất của ánh xạ thoả mãn điều kiện Lipschitz chúng tôi chứng minh cho sự hội tụ của phương pháp. Ngoài ra, chúng tôi còn trình bày việc giải số một hệ phương trình phi tuyến dựa trên phần mềm Matlab.
Ngày hoàn thiện:	05/5/2023	
Ngày đăng:	05/5/2023	
TỪ KHÓA		
Công thức lặp		
Hội tụ bậc bốn		
Hệ phương trình phi tuyến		
Phương pháp Newton-Krylov bậc ba		
Phương pháp Newton-Krylov-Nedzhibov		

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.7592>

* Corresponding author. Email: qtmlien@ictu.edu.vn

1. Giới thiệu

Xét hệ phương trình phi tuyến

$$G(x) = 0, \quad (1)$$

trong đó $G = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))^T$ với $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm phi tuyến ($i = 1, 2, \dots, n$).

Năm 1685, Newton công bố công thức giải phương trình phi tuyến $f(x) = 0$ và đến năm 1690 Raphson đã công bố công thức lặp để tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình $f(x) = 0$ được gọi là phương pháp Newton – Raphson. Từ đó, đã có nhiều nhà khoa học quan tâm, nghiên cứu và đưa ra nhiều công thức lặp với tốc độ hội tụ bậc hai, trong đó phải kể đến phương pháp Newton [1], phương pháp Chebyshev, Halley [2] và một số phương pháp lặp hội tụ cấp 3 được trình bày trong [3] - [9]. Tuy nhiên các phương pháp này đều mắc phải độ phức tạp tính toán cao khi số phương trình và số ẩn của hệ lớn. Để khắc phục hạn chế này, bằng cách tiếp cận khác, Krylov đưa ra một phương pháp để giải gần đúng hệ phương trình phi tuyến (1) như sau:

Xét hệ phương trình:

$$G'(x_n)s_n = -G(x_n), \quad s_n = x_{n+1} - x_n, n \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Phương pháp Newton-Krylov là phương pháp tìm nghiệm gần đúng của hệ phương trình (2) với điều kiện

$$\|G'(x_n)s_n + G(x_n)\| \leq \gamma_n \|G(x_n)\|,$$

với $\gamma_n \in [0, 1]$ gọi là điều kiện ràng buộc.

Thuật toán Newton-Krylov:

1. Lấy x_0 và $\gamma_{max} \in [0, 1]$.

2. Cho $n = 0, 1, \dots$, và làm theo các bước sau:

- Chọn $\gamma_n \in [0; \gamma_{max}]$,

- Áp dụng một phương pháp lặp để tìm nghiệm s_n của hệ $G'(x_n)s_n = -G(x_n)$.

Quá trình trên sẽ dừng lại khi điều kiện sau được thỏa mãn

$$\|G'(x_n)s_n + G(x_n)\| \leq \gamma_n \|G(x_n)\|.$$

- Hiệu chỉnh $x_{n+1} = x_n + s_n$.

Năm 2008, G.H. Nedzhibov đã đề xuất một phương pháp giải gần đúng hệ phương trình phi tuyến (1) với tốc độ hội tụ bậc bốn [10], được gọi là phương pháp Newton-Krylov-Nedzhibov.

Phương pháp Newton-Krylov-Nedzhibov với công thức lặp như sau:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} [3G'(y(x_n)) - G'(x_n)]^{-1} (3G'(y(x_n)) + G'(x_n))h(x_n), \quad (3)$$

trong đó $h(x) = G'(x)^{-1}G(x)$ và $y(x) = x - \frac{2}{3}h(x)$.

Từ công thức (3) ta xây dựng được công thức lặp sau:

$$G'(x_n).h(x_n) = G(x_n) \quad (4)$$

và

$$(3G'(y(x_n)) - G'(x_n))s_n = \frac{1}{2}(3G'(y(x_n)) - G'(x_n))h(x_n) \quad (5)$$

với $y(x) = x - \frac{2}{3}h(x)$ và $x_{n+1} = s_n + x_n$.

Ta sử dụng thuật toán Newton-Krylov tìm nghiệm gần đúng x_{n+1} từ hệ phương trình (4), (5).

Sự hội tụ và tốc độ hội tụ của phương pháp chỉ được suy ra từ kết quả thực nghiệm. Trong bài báo này chúng tôi trình bày chứng minh sự hội tụ của phương pháp Newton-Krylov- Nedzhibov với tốc độ hội tụ bậc bốn. Cấu trúc của bài báo gồm 4 phần, phần thứ nhất của bài báo là phần Giới thiệu, Phần 2 trình bày chứng minh sự hội tụ của phương pháp, Phần 3 trình bày kết quả thực nghiệm và Phần 4 là phần Kết luận.

2. Sự hội tụ của phương pháp Newton-Krylov-Nedzhibov

Trước hết chúng tôi xét hai Định lý quan trọng sau, được trình bày trong [11].

Định lý 2.1 Cho $C, I \in \mathbb{R}^n$, trong đó I là ma trận đơn vị. Nếu $\|C\| < 1$ thì $I - C^{-1}$ tồn tại và $\|I - C^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|C\|}$. Hơn nữa, nếu A khả nghịch và $\|A^{-1}B - A\| < 1$ thì B khả nghịch và

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}B - A\|}.$$

Định lý 2.2. Cho ánh xạ $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ khả vi liên tục trên một tập lồi, mở D và

$$G' \in \text{Lip}_\gamma D, \text{ khi đó với mọi } x + p \in D \text{ ta có } \|G(x + p) - G(x) - G'(x)p\| \leq \frac{\gamma}{2}\|p\|^2.$$

Tiếp theo chúng tôi trình bày sự hội tụ của phương pháp Newton-Krylov- Nedzhibov và chứng minh sự hội tụ của công thức lặp.

Định lý 2.3 (Sự hội tụ của công thức Newton-Krylov-Nedzhibov) Cho $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ khả vi liên tục trên một tập lồi mở $D \subset \mathbb{R}^n$. Giả sử tồn tại $x^* \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha, \beta > 0$ thỏa mãn $S(x^*, r) \subset D, G(x^*) = 0, G'(x^*)^{-1}$ tồn tại, $\|G'(x^*)^{-1}\| \leq \beta$, và $F' \in \text{Lip}_\gamma(S(x^*, r))$. Khi đó tồn tại số $\varepsilon > 0$ thỏa mãn với mỗi $x^0 \in S(x^*, \frac{\varepsilon}{2})$ dãy $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ xác định bởi công thức (3) hội tụ đến x^* .

Đặt $F(x) = G'(x)(3G'(y) + G'(x))^{-1}(3G'(y) - G'(x)) = G'(x) - 2G'(x)(3G'(y) + G'(x))G'(x)$, với $y = x - \frac{2}{3}h(x)$;

Đặt $H(x) = 3G'(y) - G'(x)$, khi đó $G(x) = G'(x) - 2H(x)^{-1}G'(x)$.

Từ $\|x^0 - x^*\| < \frac{\varepsilon}{2}$, với $\varepsilon = \min\left\{r, \frac{1}{2\beta\gamma}\right\}$, do G' là Lipschitz tại x^* nên ta có

$$\begin{aligned} \|G'(x^*)^{-1}[G'(x^0) - G'(x^*)]\| &\leq \|G'(x^*)^{-1}\| \|G'(x^0) - G'(x^*)\| \\ &\leq \beta\gamma \|x^0 - x^*\| < \beta\gamma \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Theo Định lý 2.1 ta có $G'(x^0)$ khả nghịch và

$$\|G'(x^0)^{-1}\| \leq \frac{\|G'(x^*)^{-1}\|}{1 - \|G'(x^*)^{-1}[G'(x^0) - G'(x^*)]\|} < \frac{4}{3} \|G'(x^*)^{-1}\| \leq \frac{4}{3} \beta$$

Từ $y^0 = x^0 - \frac{2}{3}G'(x^0)^{-1}G(x^0)$, ta suy ra

$$\begin{aligned} y^0 - x^* &= x^0 - x^* - \frac{2}{3}G'(x^0)^{-1}G(x^0) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 2G'(x^0)^{-1} [G(x^*) - G(x^0) - G'(x^0)(x - x^0)] + x^0 - x^* \right\} \end{aligned}$$

Áp dụng Định lý 2.2, ta có

$$\begin{aligned} \|y^0 - x^*\| &\leq \frac{1}{3} \left[2 \|G'(x^0)^{-1}\| \|G(x^*) - G(x^0) - G'(x^0)(x - x^0)\| + \|x^0 - x^*\| \right] \\ &< \frac{1}{3} \left(2 \frac{4\beta}{3} \frac{\gamma}{2} \|x^* - x^0\|^2 + \|x^0 - x^*\| \right) < \frac{1}{2} \|x^0 - x^*\| < \frac{1}{4} \varepsilon. \end{aligned}$$

Suy ra $y^0 \in S\left(x^*, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Do $\|y^0 - x^*\| < \frac{\varepsilon}{4}$ và G' là Lipschitz tại x^* nên ta có

$$\|G'(x^*)^{-1}[G'(y^0) - G'(x^*)]\| \leq \|G'(x^*)^{-1}\| \|G'(y^0) - G'(x^*)\| \leq \beta \gamma \|y^0 - x^*\| < \beta \gamma \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{1}{8}.$$

Áp dụng Định lý 2.1 ta có $G'(y^0)$ khả nghịch và

$$\|G'(y^0)^{-1}\| \leq \frac{\|G'(x^*)^{-1}\|}{1 - \|G'(x^*)^{-1}[G'(y^0) - G'(x^*)]\|} < \frac{8}{7} \|G'(x^*)^{-1}\| \leq \frac{4}{3} \beta.$$

Ta có

$$H(x^0) = 3G'(y^0) + G'(x^0) \Leftrightarrow H(x^0) - 4G'(x^*) = G'(x^0) - G'(x^*) + 3[G'(y^0) - G'(x^*)].$$

Từ $\|x^0 - x^*\| < \frac{\varepsilon}{2}, \|y^0 - y^*\| < \frac{\varepsilon}{4}$ và G' là Lipschitz tại x^* nên ta có

$$\begin{aligned} \|[4G'(x^*)]^{-1}[H(x^0) - 4G'(x^*)]\| &\leq \|[4G'(x^*)]^{-1}\| \|H(x^0) - 4G'(x^*)\| \\ &\leq \frac{1}{4} \|[G'(x^*)]^{-1}\| [\|G'(x^0) - G'(x^*)\| + 3\|G'(y^0) - G'(x^*)\|] \\ &< \frac{\beta}{4} [\gamma \|x^0 - x^*\| + 3\gamma \|y^0 - y^*\|] < \frac{5}{16} \beta \gamma \varepsilon \leq \frac{5}{32}. \end{aligned}$$

Áp dụng Định lý 2.1 ta có $H(x^0)$ khả nghịch và

$$\|H(x^0)^{-1}\| \leq \frac{\|[4G'(x^*)]^{-1}\|}{1 - \|[4G'(x^*)]^{-1}[H(x^0) - 4G'(x^*)]\|} < \frac{8}{27} \|[G'(x^*)]^{-1}\| \leq \frac{1}{2} \beta.$$

Ta có

$$\begin{aligned} F(x^0) &= G'(x^0) - 2H(x^0)^{-1} G'(x^0) \\ &= \frac{1}{8} \left\{ 9[G'(x^0) - G'(y^0)] H(x^0)^{-1} [G'(y^0) - G'(x^0)] + G'(x^0) + 3G'(y^0) \right\}. \end{aligned}$$

Ta lại có, $F(x^*) = \frac{1}{2} G'(x^*)$, nên

$$\begin{aligned} &F(x^0) - F(x^*) \\ &= \frac{1}{8} \left\{ 9[G'(x^0) - G'(y^0)] H(x^0)^{-1} [G'(y^0) - G'(x^0)] + G'(x^0) - G'(x^*) + 3[G'(y^0) - G'(x^*)] \right\} \end{aligned}$$

Từ G' là Lipschitz tại x^* nên ta có

$$\begin{aligned} &\|2G'(x^*)^{-1} [F(x^0) - F(x^*)]\| \leq 2 \|2G'(x^*)^{-1}\| \|F(x^0) - F(x^*)\| \\ &\leq \frac{\|G'(x^*)^{-1}\|}{4} \left[9\|G'(x^0) - G'(y^0)\| \|H(x^0)^{-1}\| \|G'(y^0) - G'(x^0)\| + \|G'(x^0) - G'(x^*)\| + 3\|G'(y^0) - G'(x^*)\| \right] \\ &\leq \frac{\beta}{4} \left[\frac{9\beta}{2} \gamma^2 \|y^0 - x^0\|^2 + \gamma \|x^0 - x^*\| + 3\gamma \|y^0 - x^*\| \right] < \frac{81}{128} \beta^2 \gamma^2 \varepsilon^2 + \frac{5}{16} \beta \gamma \varepsilon < \frac{161}{512}. \end{aligned}$$

Áp dụng Định lý 2.1 ta có $F(x^0)$ khả nghịch và

$$\|F(x^0)^{-1}\| \leq \frac{\|2G'(x^*)^{-1}\|}{1 - \|2G'(x^*)^{-1} [F(x^0) - F(x^*)]\|} < \frac{1024}{315} \beta < 3\beta.$$

Đặt $L(x) = 3G'(y) - G'(x)$, khi đó

$$L(x^0) - 2G'(x^*) = 3[G'(y^0) - G'(x^*)] + G'(x^*) - G'(x^0).$$

Từ $\|x^0 - x^*\| < \frac{\varepsilon}{2}, \|y^0 - y^*\| < \frac{\varepsilon}{4}$ và G' là Lipschitz tại x^* nên bằng cách đánh giá tương tự ta có

$$\|(2G'(x^*))^{-1} [L(x^0) - 2G'(x^*)]\| < \frac{5}{16}.$$

Áp dụng Định lý 2.1 ta có $L(x^0)$ khả nghịch và

$$\|L(x^0)^{-1}\| \leq \frac{\|(2G'(x^*))^{-1}\|}{1 - \|(2G'(x^*))^{-1} [L(x^0) - 2G'(x^*)]\|} < \frac{8}{11} \|G'(x^*)^{-1}\| < \beta.$$

Từ định nghĩa của x_{n+1} ta có $x_1 = x^0 - \frac{1}{2} F(x^0)^{-1} G(x^0)$. Do đó

$$\begin{aligned} x_1 - x^* &= x^0 - x^* - \frac{1}{2} F(x^0)^{-1} G(x^0) \\ &= x^0 - x^* - \frac{1}{2} L(x^0)^{-1} [3G'(y^0) + G'(x^0)] + \frac{1}{2} F(x^0)^{-1} [G'(x^*) - G(x^0) - G'(x^0)(x^* - x^0)] \\ &= \frac{3}{2} L(x^0)^{-1} [G'(y^0) - G'(x^0)](x^0 - x^*) + \frac{1}{2} F(x^0)^{-1} [G'(x^*) - G(x^0) - G'(x^0)(x^* - x^0)] \end{aligned}$$

Áp dụng Định lý 2.2 ta có

$$\|x_1 - x^*\| \leq \frac{3}{2} \|L(x^0)^{-1}\| \|G'(y^0) - G'(x^0)\| \|x^0 - x^*\| + \frac{1}{2} \|F(x^0)^{-1}\| \|G'(x^*) - G(x^0) - G'(x^0)(x^* - x^0)\|$$

$$< \frac{3\beta}{2} \gamma \|y^0 - x^0\| \|x^0 - x^*\| + \frac{3\beta}{2} \frac{\gamma}{2} \|x^* - x^0\|^2 < \frac{3}{4} \|x^* - x^0\| < \frac{3}{8} \varepsilon < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

$$\text{Suy ra } x_1 \in S\left(x^*, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

$$\text{Chúng minh tương tự ta có } \|x_2 - x^*\| < \frac{3}{4} \|x_1 - x^*\| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ từ đó suy ra } x_2 \in S\left(x^*, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_{k+1} \in S\left(x^*, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ và $\|x_{k+1} - x^*\| < \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \|x^0 - x^*\|$, do đó x_n hội tụ đến x^* .

3. Kết quả thực nghiệm

Trong phần này, chúng tôi sử dụng Matlab để tìm nghiệm gần đúng của hệ thông qua công thức lặp (3) với sai số không vượt quá 10^{-6} .

Ví dụ: Giải gần đúng hệ phương trình bằng phương pháp Newton-Krylov- Nedzhibov.

$$\begin{cases} x_1^3 x_3 + x_2^3 x_4 = 14 \\ x_1^2 x_3 + x_2^2 x_4 = 5 \\ x_1 x_3 + x_2 x_4 = 2 \\ x_1 + x_4 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Chọn giá trị ban đầu $x^0 = 1, 0, 2, 0$, sau khi thực hiện 3 bước lặp với thời gian chạy 0.159 (s) chúng tôi thu được nghiệm gần đúng của hệ phương trình (5) là

$$3.000001, 0.999999, 0.500001, 0.500001.$$

Mã code :

```
% Khởi tạo giá trị ban đầu
x = [1; 0; 2; 0];
maxIter = 1000;
tol = 1e-6;
iter = 0;
tic % bắt đầu đo thời gian chạy của toàn bộ chương trình
while iter < maxIter
    F = [x(1)^3*x(3) + x(4)*x(2)^2*x(2)^2 - 14;
        x(1)^2*x(3) + x(2)^2*x(4) - 5;
        x(1)*x(3) + x(2)*x(4) - 2;
        x(1) + x(4) - 1];
    normF = norm(F);
    if normF < tol
        fprintf('Converged after %d iterations\n', iter);
        break;
    end
    J = jacobian(x);
    delta = krylovNedzhibov(-F,J);
    x = x + delta;
    iter = iter + 1;
```

end

toc % kết thúc đo thời gian chạy của toàn bộ chương trình

fprintf('Solution: x1=%f, x2=%f, x3=%f, x4=%f\n', x(1), x(2), x(3), x(4)).

4. Kết luận

Bài báo đã trình bày phương pháp Newton-Krylov- Nedzhibov với tốc độ hội tụ bậc bốn. Đây là một cải tiến của phương pháp Newton-Krylov và là một kết quả rất cần thiết để chúng tôi có thể giải quyết các bài toán quan trọng trong các nghiên cứu về lý thuyết mạch của chúng tôi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] M. Drexler, "Newton method as a global solver for non-linear problems," Ph.D. Thesis, University of Oxford, 1997.
- [2] S. Amat, S. Busquier, and J. M. Gutierrez, "Geometric constructions of iterative methods to solve nonlinear equations," *Comp. Appl. Math.*, vol. 157, pp. 197-205, 2003.
- [3] J. M. Gutierrez and M. A. Hernandez, "A family of Chebyshev-Halley type methods in Banach spaces," *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 55, pp. 113-130, 1997.
- [4] D. K. R. Babajee, M. Z. Dauhoo, M. T. Darvishi, and A. Barati, "A note on the local convergence of iterative methods based on Adomian decomposition method and 3-node quadrature rule," *Appl. Math. Comput.*, vol. 200, pp. 452-458, 2008.
- [5] D. K. R. Babajee and M. Z. Dauhoo, "An analysis of the properties of the variants of Newton's method with third order convergence," *Appl. Math. Comput.*, vol. 183, pp. 659-684, 2006.
- [6] D. K. R. Babajee and M. Z. Dauhoo, "Analysis of a family of two-point iterative methods with third order convergence," in *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, T. E. Simos, G. Psihoyios, Ch. Tsitouras, (eds.), WILEY-VCH Verlag GmbH & Co.KGaA, Greece, 2006, pp. 658-661.
- [7] A. Cordero and J. R. Torregrosa, "Variants of Newton's method for functions of several variables," *Appl. Math. Comput.*, vol. 183, pp. 199-208, 2006.
- [8] M. T. Darvishi and A. Barati, "A third-order Newton-type method to solve systems of nonlinear equations," *Appl. Math. Comput.*, vol. 187, pp. 630-635, 2007.
- [9] M. T. Darvishi and A. Barati, "Super cubic iterative methods to solve systems of nonlinear equations," *Appl. Math. Comput.*, vol. 188, pp. 1678-1685, 2007.
- [10] G. H. Nedzhibov, "A family of multi-point iterative methods for solving systems of nonlinear equations," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 222, pp. 244-250, 2008.
- [11] J. E. Dennis and R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinears*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1983.