

TIME-OPTIMAL ROUTING IN DYNAMIC ENVIRONMENTS WITH SOFT OBSTACLES: A GEOMETRIC-OPTICS APPROACH

Pham Thi Lien, Tran Tuan Viet, Duong Thi Quy*

TNU - University of Information and Communication Technology

ARTICLE INFO	ABSTRACT
Received: 23/9/2025 Revised: 06/11/2025 Published: 06/11/2025	The transportation routing problem in environments with dynamically changing characteristics has attracted research interest for many years. Formulating and solving the optimal path-finding problem is a practical necessity, especially as delivery costs continue to rise and often approach the value of the goods. This study minimizes delivery time rather than travel distance. To build an application model for the routing problem, we adopt the geometric-optics method proposed by A. L. Kazakov and A. A. Lempert (2011), based on the principle of light propagation in an optically inhomogeneous medium. Our algorithm constructs an optimal route in environments with both static and moving obstacles, particularly when obstacles possess soft influence regions—that is, the space around an obstacle is not completely blocked but incurs increasing impedance as one approaches the obstacle's center. This influence is modeled as a distance-dependent increase, reflecting changing travel conditions within the obstructed area. Several computational test models were conducted, demonstrating the effectiveness of the modeling tools and the proposed algorithm in adapting to complex dynamic environments and nonlinear obstacle structures.
KEYWORDS Routing problems Optimization Optical geometry methods Optimal path Eikonal equations	

ĐỊNH TUYẾN TỐI ƯU THEO THỜI GIAN TRONG MÔI TRƯỜNG ĐỘNG VỚI VẬT CẢN MỀM: TIẾP CẬN QUANG HỌC-HÌNH HỌC

Phạm Thị Liên, Trần Tuấn Việt, Dương Thị Quy*

Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông – ĐH Thái Nguyên

THÔNG TIN BÀI BÁO	TÓM TẮT
Ngày nhận bài: 23/9/2025 Ngày hoàn thiện: 06/11/2025 Ngày đăng: 06/11/2025	Bài toán định tuyến vận tải trong môi trường có đặc tính thay đổi linh hoạt đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu trong nhiều năm qua. Việc xây dựng bài toán tìm đường đi tối ưu là một yêu cầu thiết thực trong thực tiễn, đặc biệt trong bối cảnh chi phí giao hàng ngày càng gia tăng và thường tiệm cận với giá trị hàng hóa. Nghiên cứu này tối ưu thời gian giao hàng thay vì quãng đường. Để xây dựng mô hình ứng dụng cho bài toán định tuyến, chúng tôi áp dụng phương pháp quang học – hình học do A. L. Kazakov và A. A. Lempert (2011) đề xuất, dựa trên nguyên lý lan truyền ánh sáng trong môi trường không đồng nhất về quang học. Thuật toán chúng tôi đề xuất xây dựng tuyến đường đi tối ưu trong môi trường có cả vật cản tĩnh và động, đặc biệt trong điều kiện các vật cản có vùng ảnh hưởng mềm – tức là không gian xung quanh vật cản không bị chặn hoàn toàn, nhưng chịu ảnh hưởng tăng dần khi tiến gần tâm vật cản. Mức độ ảnh hưởng này được mô hình hóa tăng dần theo khoảng cách, phản ánh sự thay đổi điều kiện di chuyển trong vùng cản trở. Một số mô hình thử nghiệm tính toán đã thực hiện, cho thấy hiệu quả của các công cụ mô hình hóa và thuật toán đề xuất trong việc thích ứng với môi trường động phức tạp và cấu trúc vật cản không tuyến tính.
TỪ KHÓA Bài toán định tuyến Tối ưu hóa Phương pháp hình học quang học Tìm đường đi tối ưu Phương trình Eikonal	

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.13664>

* Corresponding author. Email: dtquy@ictu.edu.vn

1. Giới thiệu

Trong những năm trước, đã có nhiều thuật toán tìm đường được đề xuất nhằm tối ưu hóa lộ trình và nâng cao hiệu quả trong các điều kiện khác nhau. Chẳng hạn, A* được thiết kế để xác định đường đi ngắn nhất, trong khi D* đảm bảo xây dựng đường đi hoàn chỉnh từ điểm xuất phát đến điểm đích [1], [2]. Dù những phương pháp này mang lại nhiều cải thiện, song chúng thường chưa xét đến sự tồn tại của các chướng ngại động trong môi trường. Thực tế, ở nhiều trường hợp, việc bỏ qua các biến động của môi trường hay sự xuất hiện bất ngờ của vật cản là không thể, vì chúng tác động trực tiếp đến lộ trình. Khi giải quyết bài toán định tuyến trong bối cảnh môi trường động, các kỹ thuật tìm kiếm heuristic thường được sử dụng để đưa ra lời giải phù hợp trong phần lớn tình huống. Trong [3], tác giả đã đề xuất áp dụng A* cho môi trường động có vật cản. Công trình [4] nghiên cứu vấn đề điều hướng của máy bay không người lái và phát triển một thuật toán cho phép xác định quỹ đạo tránh va chạm. Trong [5], nhóm tác giả mở rộng thuật toán A* theo hướng thích ứng để xử lý các chướng ngại trong môi trường phức tạp. Đồng thời, ở [6], [7], các môi trường được phân tách thành đồ thị điểm tham chiếu trước khi áp dụng A*, sau đó kết hợp với phương pháp lọc điểm và phân chia ranh giới nhằm giảm kích thước đồ thị. Một nhóm bài toán riêng biệt tập trung vào việc xây dựng lộ trình linh hoạt cho robot trong tình huống có các vật cản chưa biết trước [8]. Đối với robot tự hành dưới nước, Bychkov, Ulyanov và cộng sự [9], [10] đã đề xuất phương pháp hai cấp độ để giải quyết bài toán định tuyến động cho nhiều robot dưới nước.

Ngoài ra, dựa trên phương pháp quang học hình học do Kazakov và Lempert [11] đề xuất, dựa trên sự tương đồng giữa truyền ánh sáng trong môi trường quang học không đồng nhất và việc cực tiểu hóa hàm tích phân, một hướng tiếp cận nghiên cứu mới đã được khai thác. Trong nghiên cứu này, chúng tôi tập trung vào bài toán xây dựng lộ trình tối ưu trong môi trường động có sự thay đổi theo chu kỳ thời gian. Mục tiêu là tìm ra tuyến đường nhanh nhất nối hai điểm, đồng thời vượt qua các rào cản và tránh chướng ngại vật. Các thuật toán được đề xuất dựa trên nền tảng quang học – hình học và phương pháp tìm cực tiểu của hàm tích phân [12].

2. Đặt vấn đề và phương pháp giải quyết

Cho các điểm $A(x_a, y_a)$ và $B(x_b, y_b)$ thuộc miền $X \subset \mathbb{R}^2$ và hàm $f(t, x, y) > 0$ là tốc độ chuyển động tức thời tại mỗi điểm $(x, y) \in X$ và nếu $f(t, x, y) = 0$ thì việc đi qua điểm này bị cấm. Hàm $f(t, x, y)$ liên tục từng phần trong các biến không gian x, y và hằng số từng phần trong t với các điểm chuyển tiếp đã biết t_i ($i = 1, \dots, N$). Chúng ta cần tìm một tuyến đường mang lại hàm cực tiểu:

$$\rho(a, b) = \min_{\Gamma \in G(a, b)} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(t, x, y)}, \quad (1)$$

Ở đây, $G(a, b)$ là tập hợp các đường cong liên tục, thuộc về không gian X và kết nối các điểm A và B .

Từ quan điểm của quang học và hình học, tích phân (1) xác định thời gian trong đó ánh sáng thoát ra từ điểm A đến điểm B , chuyển động trong một môi trường không đồng nhất về mặt quang học [11]. Theo nguyên lý Huygens, bất kỳ điểm nào trong vùng X mà ánh sáng đã tới đều có thể được coi là nguồn sáng độc lập [12]. Do đó, bằng cách giải phóng một sóng ánh sáng từ điểm A , chúng ta có thể xây dựng quỹ đạo chuyển động của nó và ghi lại photon sẽ là hạt đầu tiên chạm tới điểm B . Sau đó, di chuyển theo hướng ngược lại của thời gian, chúng ta có thể khôi phục quỹ đạo của các điểm photon, đó sẽ là đường cong mong muốn.

Vì môi trường không đổi theo thời gian nên điểm mấu chốt ở đây là cấu trúc của mặt sóng ánh sáng tại thời điểm thay đổi trạng thái. Các mặt sóng này được xác định từ nghiệm của phương trình Eikonal [13], đây là phương trình vi phân từng phần không đồng nhất phi tuyến bậc nhất

$$\|\nabla u(x)\| = 1/f(x), \quad (2)$$

Trong đó, ∇ là toán tử gradient, $\|\cdot\|$ là chuẩn Euclide.

Các đường mức của hàm mong muốn $u(x) = \text{const}$ xác định vị trí của mặt sóng tại các thời điểm khác nhau.

Giải phương trình (2) là chúng ta có một nghiệm riêng. Lưu ý rằng đối với một lớp nhất định của hàm $f(x)$, nghiệm là chính xác.

3. Thuật toán và thực nghiệm tính toán

3.1. Thuật toán

Xét $X \in R^2$ là vùng diện tích giới hạn và $f(t, x, y)$ là tốc độ tức thời của sóng ánh sáng tại một điểm $(x, y) \in X$ ở thời điểm t . Trong quá trình di chuyển, đối tượng sẽ bị ảnh hưởng bởi các vật cản tác động $H(t) = \bigcup_{i=1, u} H_i = \bigcup_{i=1, u} \{(x, y) : f(t, x, y) = -1\}$.

Thuật toán 1: Thuật toán lan truyền sóng ánh sáng

Chúng ta hãy xem xét thuật toán lan truyền sóng từ một điểm $A(x_a, y_a) \in X \setminus H(t_0)$ ở thời điểm $t = t_0$.

Dữ liệu đầu vào:

$U = \{A\}$ - Là mảng lưu trữ các điểm truyền sóng ánh sáng thứ cấp,

T_p - Thời gian di chuyển của sóng ánh sáng từ một điểm A đến điểm thứ cấp của sóng ánh sáng p ,

S_p - Là nguồn thứ cấp của sóng ánh sáng tới điểm p

Bước 1. Ánh sáng truyền từ nguồn sáng A theo 8 hướng trong môi trường quang học. Chúng ta xác định được các mặt trước của sóng sau khoảng thời gian t . Thời gian di chuyển từ nguồn sáng A tới các mặt trước của sóng (x_p, y_p) được tính như sau:

$$T_{V_j} = T_p + t_{pV_j}, \text{ ở đây } t_{pV_j} = 2 \frac{\sqrt{(x_p - x_{V_j})^2 + (y_p - y_{V_j})^2}}{g(t_0, x_p, y_p) + g(t_0, x_{V_j}, y_{V_j})},$$

Bước 2. Nếu giá trị T_{V_j} tìm thấy nhỏ hơn giá trị trước đó trong nút được đề cập và sẽ được lưu vào $S_{V_j} = p$.

Thực hiện bước 1 và 2 đối với tất cả các phần tử sóng thứ cấp.

Kết quả của thuật toán này là thời gian nhỏ nhất để một sóng ánh sáng phát ra từ một điểm đến được từng phần tử của tập hợp.

Thuật toán 2. Tìm đường đi từ một điểm đến một điểm

Tìm đường đi từ điểm A đến điểm B với thời gian ban đầu t_0 , $A, B \in X \setminus H(t_0)$. Giả sử $L(A; B)$ - lưu danh sách các điểm trên đường đi từ điểm A tới điểm B . Ban đầu $L(A; B) = \{B\}$.

Bước 1. Từ điểm A thực hiện lan truyền sóng ánh sáng theo thuật toán 1, với thời gian T_p xác định tới tất cả các điểm $p \in X \setminus H(t_0)$ và nguồn sóng ánh sáng thứ cấp S_p .

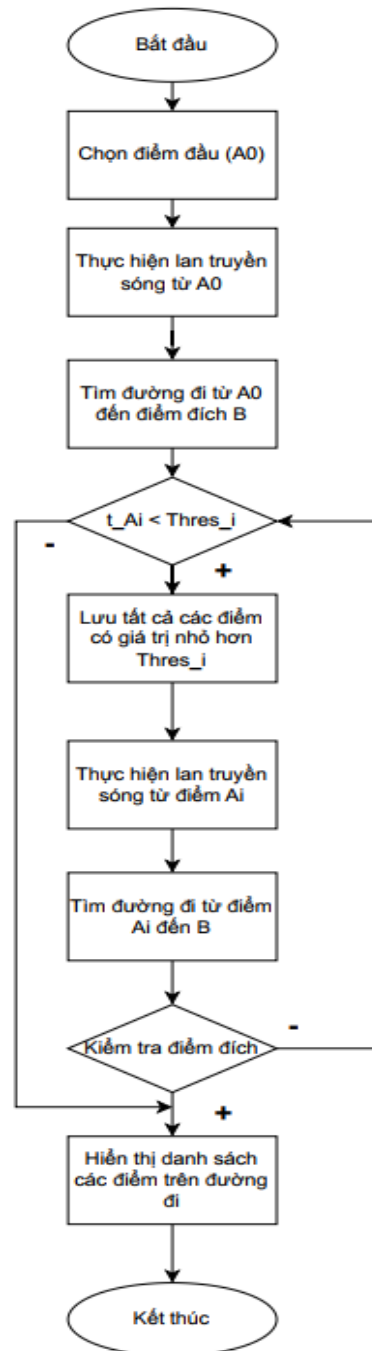
Bước 2. Từ điểm đích B tìm điểm nguồn S_B truyền tới nó và lưu trữ S_B vào danh sách $L(A; B)$

$$L(A; B) = L(A; B) \cup \{S_B\},$$

Bước 3. Nếu S_B trùng với điểm A thì thuật toán kết thúc. Trường hợp ngược lại, gán $B = S_B$ và thực hiện lại bước 2.

Bước 4. Các phần tử được lưu trong danh sách $L(A; B)$ chính là các điểm sẽ phải đi qua khi đi từ A đến B.

Lưu đồ thuật toán của quá trình lan truyền sóng và tìm đường đi được minh họa trong Hình 1.



Hình 1. Lưu đồ thuật toán minh họa quá trình lan truyền sóng và tìm đường đi

3.2. Mô hình thực nghiệm

Thực nghiệm 1. Khảo sát bài toán tìm đường đi của đối tượng từ điểm $A(0; -5)$ tới điểm đích $B(0; 5)$. Trong quá trình di chuyển, đối tượng sẽ gặp các vật cản H và sẽ bị tác động bởi các

vật cản đó. Các vật cản H được định nghĩa $H = \{h_1(-2,5; -2,5); h_2(2,5; 2,5)\}$ và có vùng ảnh hưởng có bán kính $r_0 = 2,5$ m không thể di chuyển vào được.

Vì không thể di chuyển vào vùng ảnh hưởng, nên mọi điểm bên trong vùng ảnh hưởng không thể đi qua và coi là vật cản. Vì vậy hàm vận tốc $f(t, x, y)$ được định nghĩa như sau:

$$f(t, x, y) = \begin{cases} 1; & d \geq r_0 \\ -1; & d < r_0 \end{cases}$$

Ở đây, $d = \min d(H, (x, y))$ là khoảng cách giữa điểm (x, y) tới các vật cản H .

Trong trường hợp này, điểm bắt đầu và điểm đích không được nằm trong vùng ảnh hưởng của vật cản. Sử dụng thuật toán 1 và 2, chúng ta nhận được kết quả đường đi từ điểm A đến điểm B là đoạn thẳng AB (đường nét liền trên Hình 2) có độ dài 10 m và đi qua 12 điểm (gồm cả điểm đầu và điểm cuối) có tọa độ cụ thể như sau:

(0; -5); (0; -4,09); (0; -3,18); (0; -2,27); (0; -1,36); (0; -0,45);

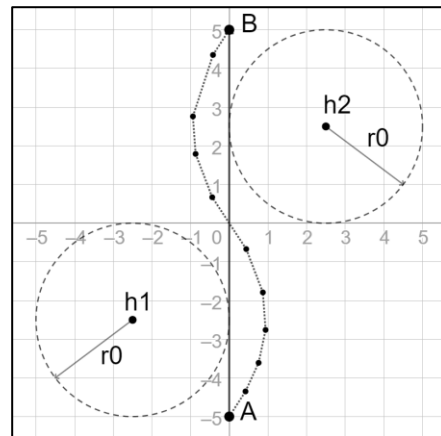
(0; 0,45); (0; 1,36); (0; 2,27); (0; 3,18); (0; 4,09); (0; 5);

Đối tượng đã di chuyển trong 11,68 giây.

Kết quả của phương pháp chúng tôi đề xuất được so sánh với phương pháp CFM (Curve-shortening flow methods) khi sử dụng cùng các tham số môi trường [1]. Kết quả so sánh được thể hiện rõ trong Hình 2 và Bảng 1. Trong bài báo [1], độ dài đường đi là 10,87 m và thời gian cần để di chuyển là 13,75 giây. Chúng ta có thể thấy rõ ràng rằng, kết quả của phương pháp lan truyền sóng tốt hơn cả về quãng đường và thời gian di chuyển so với phương pháp CFM.

Bảng 1. Bảng so sánh kết quả của phương pháp lan truyền sóng và CFM trong trường hợp đối tượng di chuyển ngoài vùng ảnh hưởng của vật cản

Phương pháp	Độ dài đường đi	Thời gian di chuyển
Phương pháp lan truyền sóng (nghiên cứu này)	10 m	11,68 giây
Curve-shortening flow (CFM) [1]	10,87 m	13,75 giây



Hình 2. Đường đi của đối tượng theo phương pháp truyền sóng ánh sáng (đường thẳng) và phương pháp CFM (đường cong)

Thực nghiệm 2. Khác với thực nghiệm 1, trong thực nghiệm này chúng tôi xem xét một bài toán trong đó chuyển động của một đối tượng trong vùng ảnh hưởng của vật cản. Cụ thể bài toán là tìm một tuyến đường cho đối tượng di chuyển từ điểm A(0,25; 0,3) đến điểm đích B(1,75; 0,8) trong môi trường có nhiều vật cản với bán kính vùng ảnh hưởng của vật cản là $r_0 = 0,5$ m và tập hợp các vật cản bao gồm ba rào cản $H = \{h_1(0,4; 0,55); h_2(0,7; 0,75); h_3(1,5; 0,4)\}$. Hàm $f(t, x, y)$ này được định nghĩa theo công thức:

$$f(t, x, y) = \begin{cases} -1 & ; (x, y) \in H \\ 1 & ; (x, y) \notin H; d \geq r_0 \\ 1 - r_0 + d & ; (x, y) \notin H; d < r_0 \end{cases}$$

Ở đây, $d = \min d(H, (x, y))$ – khoảng cách giữa điểm (x, y) và các vật cản H .

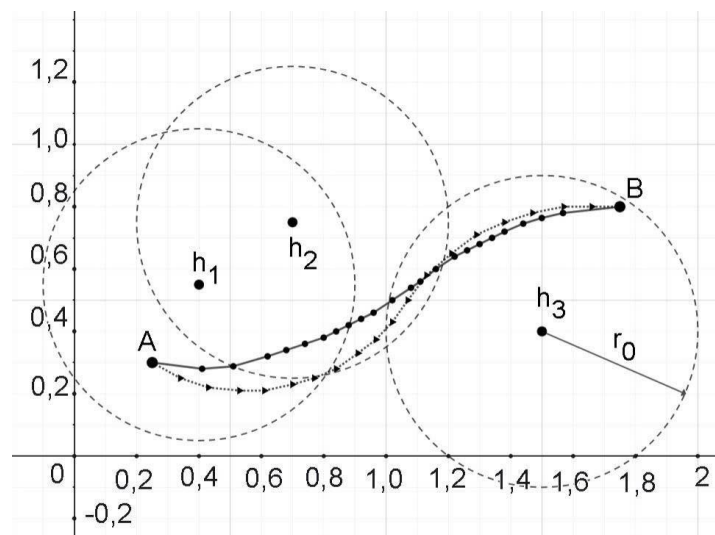
Sử dụng thuật toán 1 và 2 trong trường hợp này, điểm bắt đầu và điểm đích nằm trong vùng ảnh hưởng của vật cản. Càng gần tâm vật cản thì tốc độ của đối tượng di chuyển càng giảm vì lực cản càng lớn. Do đó, đường cong từ điểm A đến điểm B có thời gian di chuyển ngắn nhất khi đường cong này gần như đường thẳng AB. Kết quả đường cong từ A đến B có độ dài 1,61 m và đi qua 22 điểm.

(0,25; 0,3); (0,56; 0,3); (0,62; 0,32); (0,68; 0,34); (0,74; 0,36); (0,8; 0,38); (0,84; 0,4)
(0,88; 0,42); (0,92; 0,44); (0,96; 0,46); (1,02; 0,5); (1,08; 0,54); (1,1; 0,56); (1,16; 0,6); (1,22; 0,64); (1,26; 0,66); (1,3; 0,68); (1,34; 0,7); (1,38; 0,72); (1,44; 0,74); (1,5; 0,76); (1,56; 0,78); (1,75; 0,8)

So sánh với kết quả được công bố trong bài báo [1] sử dụng cùng các tham số của môi trường, độ dài của tuyến đường là 1,72 m và thời gian di chuyển hết 42,53 giây. Kết quả so sánh được chỉ rõ trên Hình 3 và Bảng 2.

Bảng 2. Bảng so sánh kết quả của phương pháp lan truyền sóng và CFM trong trường hợp đối tượng di chuyển trong vùng ảnh hưởng của vật cản

Phương pháp	Độ dài đường đi	Thời gian di chuyển
Phương pháp lan truyền sóng (nghiên cứu này)	1,61 m	12,23 giây
Curve-shortening flow (CFM) [1]	1,72 m	42,53 giây



Hình 3. Đường đi của đối tượng theo phương pháp truyền sóng ánh sáng (các chấm tròn) và phương pháp CFM (các chấm tam giác)

4. Kết luận

Trong quá trình nghiên cứu, chúng tôi đã đưa ra các vấn đề trong bài toán xây dựng tuyến đường đi tối ưu giữa hai điểm trong môi trường có vật cản với các vùng ảnh hưởng có thể di chuyển và không thể di chuyển. Điểm nổi bật của nghiên cứu này giúp phân biệt nó với hầu hết các nghiên cứu tương tự là thời gian tối thiểu cần thiết để di chuyển giữa chúng được coi là khoảng cách giữa các điểm. Ngoài ra, khi xây dựng các tuyến đường, chúng tôi đã sử dụng nghiệm của phương trình Eikonal trong quá trình tính toán giá trị thời gian (bước 1 trong thuật toán 1) tới các điểm trong môi trường đang được xem xét, điều này giúp loại bỏ việc xem xét bài toán trên đồ thị.

Để xây dựng giải pháp, chúng tôi đã sử dụng thuật toán dựa trên phương pháp hình học quang học, cho phép xây dựng các tuyến đường không chỉ trong môi trường bình thường mà còn trong môi trường động với số liệu phi Euclide. Trong trường hợp này, thuật toán đã cung cấp giải pháp tối ưu. Kết quả của thuật toán là thời gian ngắn nhất để di chuyển từ một điểm tới một điểm đồng

thời có thể tránh được các vật cản với vùng ảnh hưởng có thể di chuyển trong đó và không thể di chuyển trong đó có trên đường đi. Thông tin quãng đường luôn được cập nhật sau khoảng thời gian cố định, điều này cho phép tránh được các vật cản và tìm ra được đường đi tốt nhất. Trong quá trình thử nghiệm tính toán, thuật toán này đã thể hiện hiệu quả của chúng trong nhiều trường hợp khác nhau. Hơn nữa khi giải bài toán này, cách tiếp cận được đề xuất trong một số trường hợp cho thấy ưu điểm so với các cách tiếp cận đã biết. Mục tiêu chính của nghiên cứu là đưa ra giải pháp tìm đường đi cho đối tượng trong môi trường thay đổi và có vật cản tĩnh với vùng ảnh hưởng có thể di chuyển được trong đó và chịu sự tác động làm thay đổi đường đi, và vùng ảnh hưởng không thể di chuyển được trong đó.

Lời cảm ơn

Bài báo là sản phẩm của đề tài có mã số T2025-07-08, được tài trợ bởi kinh phí của trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông – Đại học Thái Nguyên. Nhóm tác giả xin chân thành cảm ơn sự tài trợ của nhà trường.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] M. Huptych and S. Rock, "Real-time path planning in dynamic environments for unmanned aerial vehicles using the curve-shortening flow method," *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 18, no. 1, pp. 1–16, January-February 2021.
- [2] E. I. Veremei and M. V. Sotnikova, "Optimal Routing Based on Weather Forecast," *International Journal of Open Information Technologies*, vol. 4, no. 3, pp. 55–61, 2016.
- [3] M. E. Khaili, "Path planning in a dynamic environment," *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, vol. 5, no. 8, pp. 86–92, 2014.
- [4] A. V. Sarapulov, "Methods for solving the problem of constructing a trajectory for an unmanned aerial vehicle in a dynamic environment," *Rocket and Space Technology*, vol. 1, no. 2, pp. 92–99, 2017.
- [5] A. Vemula, K. Muelling, and J. Oh, "Path planning in dynamic environments with adaptive dimensionality," *Proceedings of the International Symposium on Combinatorial Search*, 2016, doi: 10.1609/socs.v7i1.18386.
- [6] D. Jia, C. Hu, K. Qin, and X. Cui, "Planar waypoint generation and path finding in dynamic environment," *International Conference on Identification, Information and Knowledge in the Internet of Things*, 2014, pp. 206–211.
- [7] W. Zhu, D. Jia, H. Wan, T. Yang, C. Hu, K. Qin, and X. Cui, "Waypoint graph based fast pathfinding in dynamic environment," *International Journal of Distributed Sensor Networks*, vol. 11, no. 8, 2015, Art. no. 238727.
- [8] M.-K. Ng, Y.-W. Chong, K.-M. Ko, Y.-H. Park, and Y.-B. Leau, "Adaptive path finding algorithm in dynamic environment for warehouse robot," *Neural Computing and Applications*, vol. 32, pp. 13155–13171, 2020.
- [9] I. V. Bychkov, M. Yu. Kenzin, and N. N. Maksimkin, "A Two-Level Evolutionary Approach to Routing a Group of Underwater Robots under Periodic Rotation of the Composition," *Proceedings of SPIIRAS*, vol. 18, no. 2, pp. 267–301, 2019.
- [10] S. Ulyanov, I. Bychkov, and N. Maksimkin, "Event-based path-planning and path-following in unknown environments for underactuated autonomous underwater vehicles," *Applied Sciences*, vol. 10, no. 21, 2020, Art. no. 7894.
- [11] A. Kazakov and A. Lempert, "An approach to optimization in transport logistics," *Automation and Remote Control*, vol. 72, no. 7, pp. 1398–1404, 2011.
- [12] A. L. Kazakov and A. A. Lempert, "On the route construction in changing environments using solutions of the Eikonal equation," *Izvestia of the Institute of Mathematics and Informatics of Udmurt State University*, no. 58, pp. 1–14, 2021.
- [13] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *Feynman lectures on physics*, vol. 3, *Quantum mechanics*, Addison Wesley, 1971.