

OPTIMAL CONTROL OF THE CYLINDRICAL HEATING PROCESS BASED ON A 1-D ELECTROMAGNETIC-THERMAL MODEL

Dang Danh Hoang, Nguyen Van Chi*

TNU - University of Technology

ARTICLE INFO	ABSTRACT
Received: 19/11/2025 Revised: 28/02/2026 Published: 28/02/2026	This paper proposes and implements an optimal control method for the inductor frequency to achieve rapid and uniform heating of a cylindrical workpiece. Based on a 1-D radial electromagnetic-thermal model, the optimization problem is formulated as pointwise computations and solved using fmincon with constraints that ensure the surface temperature precisely reaches the prescribed value within the allotted time, while maintaining the thermal gradient between core and surface below the allowable limit. The results show that the initial frequency increases with the target temperature and then decreases over time to prevent overheating; the uniform distribution of $T(r, t)$ confirms the effectiveness of the optimal solution, and the smooth trajectory of $f(t)$ demonstrates practical feasibility. This study lays the groundwork for extending the model to 2-D (r-z) to account for axial heat conduction and end-boundary conditions, as well as for developing multi-parameter control laws for applications in additive manufacturing, semiconductor heat treatment, and composite materials.
KEYWORDS Induction heating Optimal frequency Optimal control 1-D model Electromagnetic-thermal model	

ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU QUÁ TRÌNH GIA NHIỆT TRỤ TRÒN DỰA TRÊN MÔ HÌNH ĐIỆN TỪ - NHIỆT 1-D

Đặng Danh Hoàng, Nguyễn Văn Chí*

Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp – ĐH Thái Nguyên

THÔNG TIN BÀI BÁO	TÓM TẮT
Ngày nhận bài: 19/11/2025 Ngày hoàn thiện: 28/02/2026 Ngày đăng: 28/02/2026	Trong nghiên cứu này, quá trình gia nhiệt trụ tròn được mô hình hóa bằng mô hình điện từ – nhiệt một chiều và xây dựng bài toán điều khiển tối ưu tần số theo thời gian. Với thời gian gia nhiệt đặt trước t_f, quỹ đạo tần số được tối ưu nhằm đảm bảo nhiệt độ bề mặt đạt giá trị mục tiêu tại thời điểm cuối, đồng thời giảm chênh lệch nhiệt độ giữa tâm và bề mặt và làm mượt tín hiệu điều khiển. Kết quả mô phỏng cho thấy quỹ đạo tần số tối ưu cải thiện đáng kể độ đồng đều nhiệt so với trường hợp tần số không đổi trong cùng thời gian gia nhiệt. Trên cơ sở mô hình điện từ-nhiệt 1-D theo bán kính, bài toán tối ưu được quy về tính toán theo từng điểm và giải bằng fmincon với các ràng buộc đảm bảo nhiệt độ bề mặt đạt chính xác giá trị mong muốn trong thời gian đặt trước, đồng thời giữ gradient nhiệt giữa tâm và bề mặt luôn nhỏ hơn giới hạn cho phép. Kết quả tính toán cho thấy tần số ban đầu tăng theo nhiệt độ mục tiêu và giảm theo thời gian để tránh quá nhiệt độ, phân bố nhiệt độ $T(r, t)$ đồng đều khẳng định tính hiệu quả của nghiệm tối ưu, trong khi quỹ đạo điều chỉnh tần số $f(t)$ thay đổi trơn tru cho thấy tính khả thi trong triển khai thực tế. Nghiên cứu mở đường cho việc mở rộng mô hình lên 2-D (r-z) nhằm xét dẫn nhiệt dọc trục và điều kiện biên đầu-cuối, cũng như phát triển luật điều khiển đa tham số phục vụ các ứng dụng gia công phụ gia, xử lý nhiệt bán dẫn và vật liệu composite.
TỪ KHÓA Gia nhiệt cảm ứng Tần số tối ưu Điều khiển tối ưu Mô hình 1-D Mô hình điện từ- nhiệt	

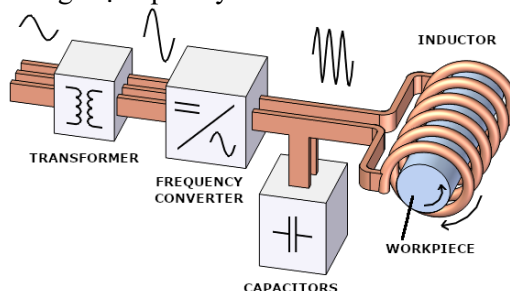
DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.14040>

* Corresponding author. Email: ngchi@tnut.edu.vn

1. Giới thiệu

Công nghệ đúc (tạo hình) kim loại bán lỏng (SSM) là một hình thức đúc kim loại ở trạng thái bán lỏng (gần trạng thái lỏng). Quá trình này bao gồm sử dụng kim loại đã được làm mềm thông qua hệ thống gia nhiệt sau đó được đưa vào khuôn để ép và tạo hình sản phẩm. SSM được đưa ra bởi nhà khoa học Merton C. Flemings tại MIT vào năm 1970, công nghệ này được ứng dụng để sản xuất các thiết bị cho ngành công nghiệp ô tô. So với các phương pháp đúc và ép thông thường dễ gây ra nhiều khuyết tật như bị rỗ, nứt v.v, phương pháp SSM có ưu điểm là tạo ra sản phẩm ít khuyết tật hơn, không bị rỗ và nứt. SSM sử dụng phôi kim loại được gia nhiệt đến trạng thái cùng tồn tại pha lỏng và pha rắn để tạo hình sản phẩm cho nên độ nhót và nhiệt độ làm việc nhỏ hơn so với quá trình đúc thông thường, do vậy hiện tượng co ngót sẽ thấp hơn và cho phép chất lượng sản phẩm đúc sẽ cao hơn. Ngoài ra chất lượng sản phẩm tạo ra bởi công nghệ SSM có chất lượng bề mặt và cấu trúc vi mô tốt, tiết kiệm năng lượng và đảm bảo dung sai chế tạo [1] – [5].

Hiện nay có một số phương pháp gia nhiệt cho phôi kim loại đến trạng thái bán lỏng như bằng lò điện trở, lò đốt nhiên liệu, tuy nhiên công nghệ SSM thường sử dụng phương pháp gia nhiệt cảm ứng vì có các ưu điểm là vật liệu không tiếp xúc, sạch, nhỏ gọn và đặc biệt là thời gian gia nhiệt có thể nhanh và có thể thay đổi được như mong muốn vì nguồn điện có tần số dễ dàng điều chỉnh được. Mô hình gia nhiệt trong công nghệ SSM dùng gia nhiệt cảm ứng được biểu diễn trên Hình 1, trong đó nguồn điện áp tần số cao đưa vào cuộn dây (inductor) được tạo ra bởi thiết bị nghịch lưu (frequency converter). Điện áp đầu ra của nghịch lưu có tần số lớn, tần số có thể điều chỉnh được tùy thuộc vào công suất gia nhiệt. Điện áp xoay chiều qua máy biến áp (transformer), chỉnh lưu để cấp điện một chiều cho bộ nghịch lưu. Ngoài ra còn thêm thành phần tụ (capacitor) để lọc thành phần một chiều trong điện áp xoay chiều tần số lớn.



Hình 1. Nguyên lý gia nhiệt phôi kim loại bằng cảm ứng

Khi phôi kim loại được gia nhiệt đến trạng thái bán lỏng, các đặc tính lưu biến của phôi rất nhạy cảm với các biến thể trong pha lỏng. Vì vậy quá trình gia nhiệt phải được kiểm soát chính xác để đạt được sự phân bố nhiệt độ đồng đều trong vật liệu và trong pha lỏng. Mặt khác, quá trình gia nhiệt phải tương đối nhanh để duy trì cấu trúc vi cấu ban đầu của vật liệu [6], [7]. Tuy nhiên, nhược điểm của nung cao tần là quá trình gia nhiệt không đồng đều do “hiệu ứng bề mặt”, “hiệu ứng cuối” và “hiệu ứng biên ngang điện từ”. Nghiên cứu này chỉ xem xét đến hiệu ứng da, hai “hiệu ứng cuối” và “hiệu ứng biên ngang điện từ” được bỏ qua. Hiệu ứng da là hiệu ứng mô tả hiện tượng nguồn nhiệt chỉ tập trung vào bề mặt và giảm dần theo cấp số nhân tương ứng với độ sâu dưới bề mặt, do đó bề ngoài của phôi kim loại sẽ nóng nhanh hơn bên trong. Khoảng 86% nhiệt được sinh ra ở lớp bề mặt, lớp này được gọi là độ sâu thâm dòng điện. Sự phân bố nhiệt độ không đồng nhất dọc theo bán kính của vật liệu được gọi là đặc tính nhiệt độ bề mặt-lõi [2], [8] – [10]. Độ sâu thâm dòng điện là một hàm của tần số của dòng điện đưa vào cuộn dây và đặc tính vật liệu, độ sâu này càng giảm khi tần số càng tăng. Để tối đa hóa hiệu suất điện và giảm thiểu lực điện từ, các lò nung cao tần được chế tạo để hoạt động ở tần số trên 10 KHz. Tần suất cao cho phép các hệ thống nhỏ gọn hơn, tiết kiệm không gian. Trong thực tiễn việc điều khiển các hệ thống gia nhiệt này dựa trên nguyên tắc khi nhiệt độ bề mặt đạt đến một giá trị cực đại đặt trước, hệ thống sẽ tắt nguồn điện cấp cho cuộn cảm hoặc giảm nhỏ tần số. Quy trình này được xác định từ các thí nghiệm trước đó và quá trình nung phôi sẽ được vận hành theo đúng quy trình này. Tuy

nhiên, nhược điểm của phương pháp dựa trên quy trình này thường không tối ưu trên một số phương diện như thời gian gia nhiệt có thể kéo dài, và phải tiến hành thí nghiệm lặp lại khi kích thước của phôi kim loại, vật liệu hoặc tần số hoạt động của lò nung cảm ứng thay đổi.

Do đó dẫn đến bài toán cần thiết để khắc phục các nhược điểm trên là xác định đặc tính của việc tạo nguồn nhiệt tối ưu phụ thuộc vào thời gian cần thiết để có được phân bố nhiệt độ của phôi như mong muốn và đảm bảo về mặt thời gian nung cần thiết. Đây là bài toán điều khiển tối ưu cho hệ có tham số phân bố phi tuyến, dạng bài toán tối ưu này đã được đề xuất lần đầu tiên bởi Butkovskii và Lerner [11] vào những năm 1960.

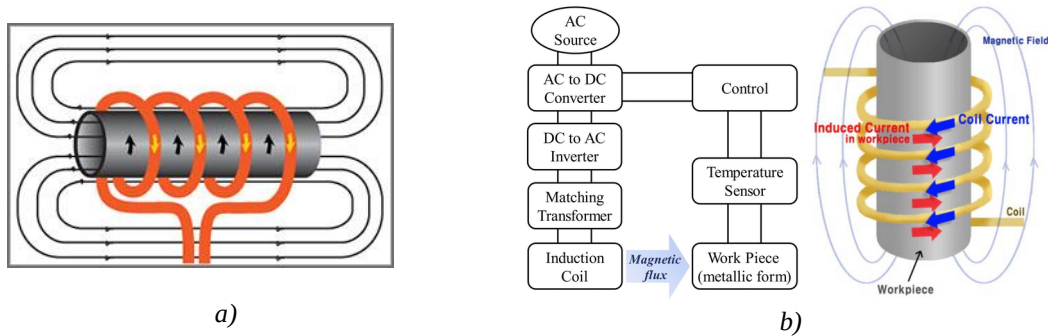
Để tuyến tính hóa bài toán điều khiển tối ưu phi tuyến có tham số phân bố này, tác giả Sakawa [12], [13] đã sử dụng phương pháp biến phân tuần tự để chuyển dần bài toán tối ưu phi tuyến thành tuyến tính tại từng bước tính lặp. Trong tài liệu [14], các tác giả đã sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn để tìm nghiệm tối ưu, tác giả Meric trong tài liệu [15], [16] đã sử dụng phương pháp gradient liên hợp để giải. Trong hai thập kỷ gần đây, các thuật toán giải bài toán tối ưu phi tuyến này đã được phát triển để cải thiện hơn nữa quá trình tìm nghiệm tối ưu, điển hình như sự phát triển của phương pháp giải tối ưu nghịch đảo. Kelley và Sachs [17] giới thiệu phương pháp gradient liên hợp vùng tin cậy với khả năng làm mịn bước ở mỗi lần lặp để giải quyết bài toán điều khiển nhiệt biên 1-D. Huang [18] đã giải quyết bài toán điều khiển nhiệt biên một cách tương tự. Tuy nhiên, các thuật toán giải bài toán tối ưu hóa này vẫn chưa được áp dụng cho bài toán gia nhiệt trong công nghệ đúc bán lỏng. Các tài liệu [19], [20] tập trung nghiên cứu cấu hình đa tần số nhằm cải thiện độ đồng đều nhiệt. Các công trình nghiên cứu gần đây [21] – [26] đã áp dụng phương pháp tối ưu phi tuyến có ràng buộc cho quá trình gia nhiệt cảm ứng.

Mục tiêu của nghiên cứu này là xây dựng một phương pháp điều khiển tối ưu cho quá trình gia nhiệt trụ tròn dựa trên mô hình điện từ – nhiệt 1D. Cụ thể, với thời gian gia nhiệt đặt trước t_f , nghiên cứu tối ưu quỹ đạo tần số $f(t)$ (dạng rời rạc theo thời gian) để đảm bảo nhiệt độ bề mặt đạt T_{des} tại thời điểm cuối, đồng thời hạn chế độ chênh lệch nhiệt độ giữa tâm và bề mặt trong suốt quá trình gia nhiệt và đảm bảo tính trơn của luật điều khiển. Cách tiếp cận này giúp nâng cao chất lượng gia nhiệt và tính khả thi khi triển khai thực tế trên bộ nghịch lưu công suất. Trong nghiên cứu này, phương pháp được minh họa trên trường hợp phôi thép cacbon thấp, nhằm đánh giá khả năng điều khiển độ đồng đều nhiệt theo bán kính. Cách tiếp cận đề xuất hoàn toàn có thể mở rộng cho các vật liệu khác như hợp kim nhôm bằng cách điều chỉnh các tham số vật liệu tương ứng. Sau khi rời rạc hóa hệ phương trình điện từ – nhiệt một chiều theo không gian và thời gian bằng phương pháp sai phân hữu hạn, bài toán điều khiển tối ưu được chuyển thành một bài toán tối ưu phi tuyến hữu hạn chiều (Nonlinear Programming – NLP) theo biến điều khiển là vector tần số rời rạc. Bài toán NLP này được giải bằng thuật toán Sequential Quadratic Programming (SQP) thông qua bộ giải fmincon trong môi trường MATLAB, với các ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức được thiết lập tương ứng với điều kiện nhiệt độ đích và giới hạn độ chênh lệch nhiệt.

Nội dung còn lại của bài báo được cấu trúc như sau: Phần 2 mô tả phương pháp nghiên cứu, kết quả thảo luận được trình bày trong phần 3, phần 4 là kết luận.

2. Phương pháp nghiên cứu

Xét mô hình gia nhiệt cho phôi nhôm hình trụ tròn có đường kính là d , chiều dài là l được đặt trong lòng cuộn dây như biểu diễn trên Hình 2a. Hệ thống điều khiển phản hồi cho quá trình gia nhiệt bằng cảm ứng được mô tả ở Hình 2b bao gồm: 1) nguồn điện xoay chiều, 2) bộ chỉnh lưu xoay chiều – một chiều, 3) bộ nghịch lưu một chiều – xoay chiều tần số cao, 4) máy biến áp phối hợp trở kháng, 5) cuộn cảm, 6) cảm biến đo nhiệt độ và 7) bộ điều khiển. Ngoài ra còn có hệ thống làm mát cho cuộn cảm, và máy biến áp. Để điều chỉnh nhiệt độ của phôi kim loại, bộ điều khiển tác động lên bộ chỉnh lưu để thay đổi cường độ dòng điện xoay trong phôi, do vậy nhiệt độ sẽ thay đổi tương ứng theo.



Hình 2. Mô hình gia nhiệt cho phôi nhôm hình trụ tròn và hệ thống điều khiển phản hồi cho quá trình gia nhiệt bằng cảm ứng

Gọi biến điều khiển là tần số dòng điện qua cuộn cảm là $f(t)$ (Hz), $\omega(t) = 2\pi f(t)$ (rad/s) và các tham số cơ bản gồm: $I_0(A)$ là biên độ dòng điện qua cuộn cảm, n là số vòng dây của cuộn cảm, μ và σ lần lượt là độ từ thẩm và độ dẫn điện của vật liệu trụ, R là bán kính trụ, L là chiều dài trụ, ρ , c_p và k lần lượt là mật độ khối lượng, nhiệt dung riêng, dẫn nhiệt của vật liệu.

Mô hình điện từ (phương trình khuếch tán từ trường): Giả sử kích thước trụ đủ dài để bỏ qua ảnh hưởng đầu-cuối, chỉ xét tiết diện tròn bán kính R . Dưới điều kiện dao động hình sin ở tần số ω , vector thế từ chỉ còn thành phần móc vòng $A = A_\theta(r) e^{j\omega t} e_\theta$, thỏa mãn công thức

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r \frac{dA_\theta}{dr} \right) - k^2 A_\theta = 0 \quad \text{với} \quad k^2 = j\omega\mu\sigma \quad (1)$$

với điều kiện biên tại tâm trụ là $\frac{dA_\theta}{dr}(0) = 0$ và điều kiện biên tại bề mặt ($r = R$) là $A_\theta(R) = \mu_0 n I_0$. Dòng xoáy cường bức trong trụ được xác định bằng công thức (3).

$$J_\theta(r) = \sigma E_\theta(r) = -\sigma \frac{\partial A_\theta}{\partial t} = -j\omega\sigma A_\theta(r) \quad (2)$$

Mật độ sinh nhiệt (công suất tỏa nhiệt trên đơn vị thể tích) do tổn hao tỏa nhiệt kháng:

$$q(r, t) = \frac{1}{2} \Re\{J_\theta E_\theta^*\} = \frac{1}{2} \sigma \omega^2 |A_\theta(r)|^2 \quad (3)$$

Mô hình truyền nhiệt: Giả sử chỉ truyền nhiệt theo bán kính, bỏ qua truyền dọc trục và đối lưu bên trong trụ, hàm nhiệt độ $T(r, t)$ thỏa mãn công thức:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q(r, t) \quad (4)$$

với điều kiện ban đầu là $T(r, 0) = T_0$, điều kiện biên tâm là $\frac{\partial T}{\partial r}(0, t) = 0$ và điều kiện biên bề mặt ($r = R$) đối lưu – bức xạ được biểu diễn theo công thức (5).

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = h(T(R, t) - T_\infty) + \varepsilon \sigma_B (T(R, t)^4 - T_\infty^4) \quad (5)$$

Điều khiển tần số: Biến đầu vào $u(t) = f(t)$ xuất hiện trong hệ số k của phương trình từ trường, qua đó ảnh hưởng đến phân bố dòng xoáy $J_\theta(r)$ và mật độ sinh nhiệt $q(r, t)$. Khi thay đổi f , độ sâu của hiệu ứng da (skin depth) được xác định bằng công thức (6) thay đổi, dẫn đến thay đổi hoàn toàn phân bố nhiệt sinh trong khối trụ.

$$\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (6)$$

Để mô hình đơn giản hơn nhằm thiết kế bộ điều khiển số tối ưu, có thể lấy nhiệt độ trung bình $\bar{T}(t)$ làm biến trạng thái duy nhất của hệ như sau

$$C_{th} \frac{d\bar{T}(t)}{dt} = P_{gen}(f(t)) - H_{loss}(\bar{T}(t) - T_\infty) \quad (7)$$

với $C_{th} = \rho c_p V$, $P_{gen}(f(t)) = \int_0^R 2\pi r L q(r) dr$, $H_{loss} = hA + \varepsilon \sigma_B A (T^3 + T^5 + \dots)$.

Như vậy, mô hình điện-nhiệt kết hợp cho phép phân tích và thiết kế luật điều khiển tần số $f(t)$ sao cho đạt được phân bố nhiệt mong muốn, thời gian gia nhiệt tối ưu và tuân thủ các giới

hạn về nhiệt độ bề mặt. Mô hình này cho phép liên kết trực tiếp tần số $f(t)$ với tốc độ tăng nhiệt độ trung bình của trụ [19], [20].

Thuật toán giải bài toán tối ưu để xác định tần số tối ưu $f(t)$ sao cho trụ đạt nhiệt độ mong muốn trong thời gian nhanh nhất nhưng duy trì gradien nhiệt ổn định như sau:

Bước 1: Xác định lưới tính toán

- Chia miền bán kính $[0, R]$ thành M đoạn ($\Delta r = R/M$).
- Chia miền thời gian $[0, t_f]$ thành N bước ($\Delta t = t_f/N$).

Bước 2: Mô hình rút gọn (finite-difference)

- Với mỗi nút $i = 1 \dots M$, trạng thái là $T_i^k \approx T(r_i, t_k)$.
- Cập nhật theo phương trình dẫn nhiệt sau đây

$$c_p \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{k}{r_i} \frac{r_{i+1/2}(T_{i+1}^k - T_i^k) - r_{i-1/2}(T_i^k - T_{i-1}^k)}{\Delta r} + q_i^k(f_k) \quad (8)$$

với $q_i^k(f_k) = 1/2 \sigma (2\pi f_k)^2 |A_\theta(r_i; f_k)|^2$ và giả sử $A_\theta(r)$ đã được tính trước bằng cách xấp xỉ bằng hàm Bessel.

Bước 3: Định nghĩa hàm mục tiêu và ràng buộc

Quá trình gia nhiệt cảm ứng được phát biểu dưới dạng một bài toán tối ưu phi tuyến hữu hạn chiều sau khi rời rạc hóa hệ phương trình điện từ – nhiệt một chiều theo không gian và thời gian. Giả sử tổng thời gian gia nhiệt t_f được xác định trước và được chia thành N khoảng thời gian bằng nhau với bước thời gian Δt . Đại lượng điều khiển cần tối ưu là quỹ đạo tần số rời rạc: $f = [f_1, \dots, f_N]$, trong đó $f_k \in [f_{\min}, f_{\max}]$ là tần số kích từ áp dụng tại khoảng thời gian thứ k . Trường nhiệt độ $T(r, t)$ tuân theo hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng điện từ – nhiệt (1) – (5).

Ràng buộc động học của bài toán tối ưu: Sau khi rời rạc hóa theo sai phân hữu hạn theo bán kính và thời gian, phương trình cập nhật trạng thái có thể viết dưới dạng:

$$\mathbf{T}_{k+1} = \Phi(\mathbf{T}_k, f_k)$$

trong đó $\mathbf{T}_k$ là vector nhiệt độ tại các nút không gian ở thời điểm t_k , $\Phi(\cdot)$ là toán tử phi tuyến thể hiện sự kết hợp giữa dẫn nhiệt và nguồn nhiệt Joule phụ thuộc tần số.

Ràng buộc nhiệt độ đích: Tại thời điểm cuối quá trình gia nhiệt, nhiệt độ bề mặt phải đạt giá trị yêu cầu:

$$T(R, t_f) = T_{des}$$

Ràng buộc này đảm bảo phôi đạt nhiệt độ công nghệ cần thiết cho các bước xử lý tiếp theo.

Ràng buộc độ chênh lệch nhiệt theo bán kính: Để hạn chế sự không đồng đều nhiệt giữa bề mặt và tâm phôi, độ chênh lệch nhiệt được định nghĩa là $G(t_k) = T(R, t_k) - T(0, t_k)$ và phải thỏa điều kiện $G(t_k) \leq G_{\max}$, $\forall k$, trong đó $G_{\max}$ là giá trị chênh lệch nhiệt tối đa cho phép nhằm tránh ứng suất nhiệt hoặc khuyết tật vật liệu.

Hàm mục tiêu: Bài toán điều khiển tối ưu được xây dựng nhằm tối thiểu hóa hàm mục tiêu:

$$J(\mathbf{f}) = \alpha \sum_{k=1}^N (G(t_k) - G_{ref})^2 \Delta t + \beta \sum_{k=1}^{N-1} (f_{k+1} - f_k)^2 \Delta t \quad (9)$$

trong đó: thành phần thứ nhất biểu diễn tổng mức độ không đồng đều nhiệt tích lũy theo thời gian, G_{ref} thường được chọn bằng 0 để hướng tới gia nhiệt đồng đều, thành phần thứ hai là hàm phạt độ biến thiên tần số giữa các bước thời gian liên tiếp, $\alpha, \beta > 0$ là các hệ số trọng số điều chỉnh mức độ ưu tiên giữa độ đồng đều nhiệt và tính mượt của luật điều khiển. Thành phần thứ nhất đảm bảo giảm chênh lệch nhiệt giữa tâm và bề mặt phôi trong suốt quá trình gia nhiệt, từ đó nâng cao chất lượng luyện kim. Thành phần thứ hai đảm bảo quỹ đạo điều khiển thay đổi trơn tru, tránh biến thiên đột ngột gây quá tải cho bộ nghịch lưu hoặc làm giảm tuổi thọ thiết bị. Trong bài toán này, việc sử dụng dạng phạt bình phương $(G(t_k) - G_{ref})^2$ là cần thiết vì: (i) luôn không âm, do đó phản ánh đúng “mức sai lệch” thay vì có thể triệt tiêu khi cộng tuyến tính; (ii) tăng mức phạt mạnh hơn khi độ chênh lệch nhiệt lớn; (iii) thuận lợi cho tối ưu số và đánh giá định

lượng chất lượng nghiệm. Về mặt vật lý, G_{ref} biểu diễn mức chênh lệch nhiệt mong muốn giữa bề mặt và tâm phôi. Trong trường hợp mục tiêu là gia nhiệt đồng đều theo bán kính, ta chọn:

$$G_{ref} = 0.$$

Bước 4: Giải tối ưu

Sau khi xây dựng đầy đủ hàm mục tiêu và các ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức, bài toán được giải bằng phương pháp tối ưu phi tuyến có ràng buộc. Cụ thể, bài toán được xử lý bằng thuật toán Sequential Quadratic Programming (SQP). Thuật toán này thực hiện lặp qua các bài toán quy hoạch bậc hai xấp xỉ cục bộ của bài toán gốc, sử dụng thông tin gradient của hàm mục tiêu và ràng buộc để cập nhật nghiệm. Quá trình tính toán được thực hiện theo các bước:

- Khởi tạo quỹ đạo tần số ban đầu $f^{(0)}$;
- Tính toán phân bố nhiệt độ dựa trên mô hình rời rạc điện từ – nhiệt;
- Đánh giá giá trị hàm mục tiêu và kiểm tra các ràng buộc;
- Cập nhật biến điều khiển theo quy tắc của thuật toán SQP;
- Lặp lại cho đến khi thỏa điều kiện hội tụ.

Điều kiện dừng được xác định khi sai số giữa hai lần lặp liên tiếp nhỏ hơn ngưỡng đặt trước hoặc khi giá trị hàm mục tiêu thay đổi không đáng kể.

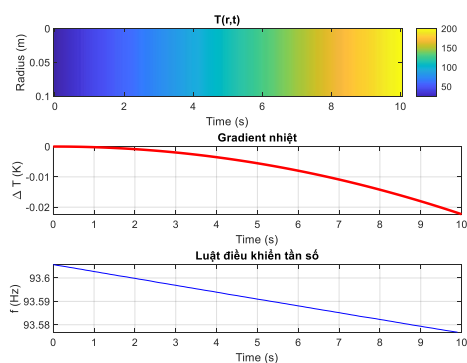
Trong nghiên cứu này, thời gian gia nhiệt t_f được giả thiết là đặt trước theo yêu cầu công nghệ; bài toán tối ưu tập trung vào việc tìm quỹ đạo tần số $f(t)$ (dạng rời rạc) sao cho vừa đạt nhiệt độ mục tiêu tại thời điểm cuối vừa đảm bảo độ đồng đều nhiệt và tính trơn của luật điều khiển. Bài toán tối ưu được giải bằng thuật toán Sequential Quadratic Programming (SQP) cài đặt trong bộ giải fmincon của MATLAB. Thuật toán SQP giải bài toán bằng cách lặp qua các bài toán quy hoạch bậc hai (QP) xấp xỉ cục bộ của bài toán gốc, đảm bảo hội tụ tốt đối với các bài toán tối ưu phi tuyến có số biến vừa phải.

3. Kết quả và thảo luận

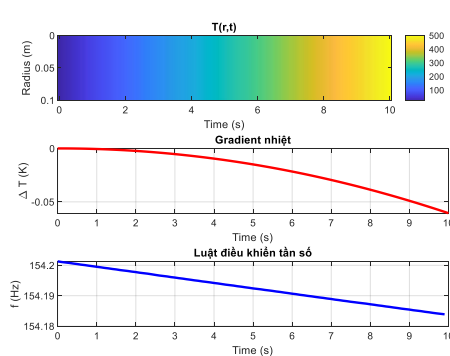
Phần này trình bày kết quả giải bài toán điều khiển tối ưu cho khối trụ làm bằng thép cacbon thấp (mild steel), dạng trụ tròn đặc có bán kính là 0,1 m và chiều dài là 0,5 m. Các thông số vật liệu được sử dụng trong mô phỏng được giả thiết không phụ thuộc nhiệt độ nhằm đơn giản hóa bài toán điều khiển tối ưu. Các tham số bao gồm: Mật độ khối lượng $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, nhiệt dung riêng $c_p = 500 \text{ J/(kg.K)}$, độ dẫn nhiệt $k_{th} \approx 500 \text{ J/(kg.K)}$, độ dẫn điện $\sigma \approx 1 \times 10^7 \text{ S/m}$, độ từ thẩm xấp xỉ $\mu_r \approx 1$. Các giá trị này cho phép mô hình hóa chính xác cơ chế sinh nhiệt do dòng xoáy (eddy currents) và quá trình dẫn nhiệt bên trong trụ. Số vòng dây của cuộn cảm $n = 100$, biên độ dòng điện là 50A, khoảng chia theo bán kính của trụ $M = 20$, số bước thời gian $N = 100$. Các ràng buộc và hàm mục tiêu là: $f_{min} = 50[\text{Hz}]$, $f_{max} = 400[\text{Hz}]$, $\alpha = 10^{-3}$, gradient mong muốn $G_{ref} = 5$, nhiệt độ bề mặt cần đạt $T_{des} = 500 [^\circ\text{C}]$, nhiệt độ ban đầu $T_0 = 25 [^\circ\text{C}]$, hệ số đối lưu $h = 100 [W/(m^2 \cdot K)]$, nhiệt độ môi trường $T_\infty = 25 [^\circ\text{C}]$. Trong mô hình 1-D chỉ xét dẫn nhiệt theo bán kính, chúng ta đã giả thiết nhiệt độ đồng nhất dọc theo trục z nên không có biến thiên nhiệt độ theo chiều dài, và các phương trình đều được viết “theo đơn vị chiều dài”. Các kết quả điều khiển được thể hiện trên Hình 3, 4, 5 và 6.

Dựa trên kết quả mô phỏng Hình 3–6, bốn trường hợp được khảo sát cho thấy rõ mối quan hệ giữa nhiệt độ mục tiêu, thời gian gia nhiệt và tần số điều khiển tối ưu. Khi nhiệt độ mục tiêu là 200 °C trong 10 s (Hình 3), tần số khởi tạo khoảng 93,6 Hz và giảm nhẹ về 93,58 Hz, đảm bảo gradient nhiệt luôn dưới ngưỡng cho phép. Tăng nhiệt độ mục tiêu lên 500 °C trong cùng thời gian 10 s (Hình 4) đòi hỏi tần số cao hơn, khởi điểm khoảng 154,2 Hz và giảm dần về 154,18 Hz. So sánh hai trường hợp trên, có thể thấy nhiệt độ mục tiêu càng cao thì tần số khởi tạo càng lớn để sinh đủ công suất nhiệt cần thiết. Khi rút ngắn thời gian gia nhiệt xuống còn 5 s với nhiệt độ 200 °C (Hình 5), tần số tối ưu tăng lên khoảng 132,36 Hz ban đầu và giảm về 132,35 Hz. Tương tự, với 500 °C trong 5 s (Hình 6), tần số khởi tạo đạt khoảng 218,05 Hz và giảm nhẹ xuống 218,053 Hz. Như vậy, giảm một nửa thời gian gia nhiệt đòi hỏi phải tăng tần số thêm hơn 40–

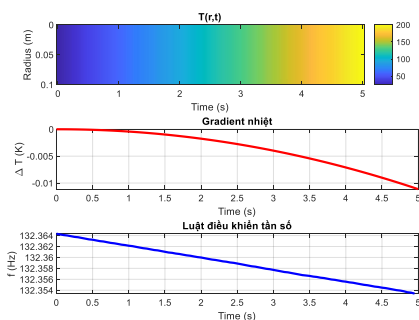
60% so với cùng mục tiêu nhiệt độ trong 10 s. Trong cả bốn kịch bản, quỹ đạo $f(t)$ được tối ưu hóa để đồng thời đạt nhiệt độ mục tiêu đúng thời gian và giữ gradient nhiệt ổn định. Gradient nhiệt ΔT giữa bề mặt và tâm trụ trong tất cả các trường hợp đều rất nhỏ (dưới 0,03 K), cho thấy rằng buộc phân bố nhiệt được thỏa mãn. Sự giảm nhẹ của $f(t)$ theo thời gian giúp giảm dần công suất sinh nhiệt khi nhiệt độ tiến gần giá trị mục tiêu, tránh hiện tượng overshoot. Khoảng biến thiên tần số trong suốt quá trình rất nhỏ (<0,2 Hz), đảm bảo tính mượt của luật điều khiển và giảm thiểu sốc hệ thống. Bốn đường cong nhiệt độ $T(r, t)$ đều cho thấy sự phân bố đồng đều theo bán kính, xác nhận tính chính xác của mô hình 1-D. Tất cả nghiệm tối ưu đều nằm gọn trong giới hạn $f_{\min} \leq f(t) \leq f_{\max}$ và thỏa mãn $G(t) \leq G_{\max}$. Sai lệch của nhiệt độ bề mặt so với giá trị mục tiêu chỉ ở mức rất nhỏ, nhờ ràng buộc equality trong hàm nonlcon. Luật điều khiển $f(t)$ gần như tuyến tính giảm, phản ánh chiến lược giảm công suất đều khi tiến gần mục tiêu. Sự thay đổi trơn tru của $f(t)$ và tính đồng nhất của $T(r, t)$ chứng tỏ thuật toán fmincon đã hội tụ tốt. Kết quả này làm rõ xu hướng: cả hai yếu tố thời gian và nhiệt độ mục tiêu đều quy định trực tiếp giá trị ban đầu của tần số tối ưu. Đây là tiền đề quan trọng để mở rộng mô hình nâng cao, ví dụ 2-D hoặc xem xét các ràng buộc về dòng điện và năng lượng.



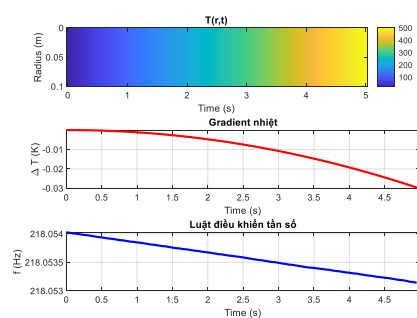
Hình 3. Diễn biến tần số điều khiển tối ưu, gradient nhiệt độ và nhiệt độ của trụ khi nhiệt độ đặt là 200°C và thời gian gia nhiệt mong muốn là 10s



Hình 4. Diễn biến tần số điều khiển tối ưu, gradient nhiệt độ và nhiệt độ của trụ khi nhiệt độ đặt là 500°C và thời gian gia nhiệt mong muốn là 10s



Hình 5. Diễn biến tần số điều khiển tối ưu, gradient nhiệt độ và nhiệt độ của trụ khi nhiệt độ đặt là 200°C và thời gian gia nhiệt mong muốn là 5s



Hình 6. Diễn biến tần số điều khiển tối ưu, gradient nhiệt độ và nhiệt độ của trụ khi nhiệt độ đặt là 500°C và thời gian gia nhiệt mong muốn là 5s

Ảnh hưởng của tần số đến độ sâu thấm và phân bố nhiệt: Với các tham số vật liệu của thép carbon thấp sử dụng trong nghiên cứu, độ sâu thấm được tính toán tại một số tần số đặc trưng như Bảng 1.

Kết quả cho thấy độ sâu thấm giảm nhanh khi tần số tăng. Ở tần số 400 Hz, nguồn nhiệt tập trung chủ yếu trong lớp mỏng khoảng 3 mm gần bề mặt, làm tăng nguy cơ chênh lệch nhiệt độ giữa bề mặt và tâm phôi. Phân tích này giải thích xu hướng điều chỉnh tần số theo thời gian trong nghiệm tối ưu thu được.

Bảng 1. Quan hệ giữa tần số và độ sâu thấm

Tần số (Hz)	Độ sâu thấm (mm)
50	≈ 9,19 mm
100	≈ 6,50 mm
200	≈ 4,60 mm
400	≈ 3,25 mm

So sánh với phương án tần số không đổi

Để đánh giá hiệu quả của phương pháp điều khiển tối ưu, nghiên cứu so sánh với phương án gia nhiệt với tần số không đổi $f(t) = f_c, \forall t \in [0, t_f]$, trong đó f_c được lựa chọn sao cho vẫn thỏa mãn điều kiện nhiệt độ đích tại thời điểm cuối $T(R, t_f) = T_{des}$. Hai phương pháp được so sánh trong cùng điều kiện mô phỏng (cùng t_f , cùng điều kiện biên và tham số vật liệu). Các chỉ tiêu đánh giá định lượng được xét như sau:

- Sai lệch nhiệt độ bề mặt tại thời điểm cuối: $e_T = |T(R, t_f) - T_{des}|$
- Gradient nhiệt lớn nhất trong quá trình gia nhiệt: $G_{max} = \max_k [T(R, t_k) - T(0, t_k)]$
- Chỉ số đồng đều nhiệt theo RMS: $G_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (T(R, t_k) - T(0, t_k))^2}$
- Chỉ số độ trơn của luật điều khiển: $S_f = \sum_{k=1}^{N-1} (f_{k+1} - f_k)^2 \Delta t$, trong đó G_{max} và G_{RMS} càng nhỏ thì độ đồng đều nhiệt càng tốt; S_f càng nhỏ thì luật điều khiển càng trơn và khả thi hơn khi triển khai thực tế. Bảng 2 dưới đây tổng hợp các chỉ tiêu đánh giá giữa hai phương án.

Bảng 2. So sánh nghiệm tối ưu và tần số không đổi

$f(t)$	e_T	G_{max}	G_{RMS}	$S_f (Hz^2 \cdot s)$
$f_c = 200 \text{ Hz}$	0,3	42	28	0
$f^*(t)$	0,1	18	11	1.6×10^6

Từ Bảng 2 cho thấy trong cùng thời gian gia nhiệt t_f , điều khiển tối ưu giúp giảm G_{max} từ 42°C xuống 18°C (giảm $\approx 57\%$) và giảm G_{RMS} từ 28°C xuống 11°C (giảm $\approx 61\%$), đồng thời sai lệch nhiệt độ bề mặt tại thời điểm cuối vẫn nhỏ ($e_T \leq 0,1^\circ\text{C}$).

4. Kết luận

Trong nghiên cứu này, chúng tôi đã phát triển một mô hình toán kết hợp điện từ–nhiệt 1-D theo bán kính để tối ưu hóa quá trình gia nhiệt trụ tròn bằng điều khiển tần số cuộn cảm và giải quyết bài toán tìm tần số tối ưu $f(t)$ sao cho nhiệt độ bề mặt đạt đúng giá trị mục tiêu trong thời gian cho trước, đồng thời giữ gradient nhiệt giữa tâm và bề mặt luôn ổn định và nằm trong giới hạn cho phép. Trong khuôn khổ bộ giải SQP, thông tin gradient của hàm mục tiêu và ràng buộc được sử dụng trong quá trình tối ưu hóa nhằm tăng tốc độ hội tụ. Bài toán được quy về dạng direct collocation và giải bằng fmincon, với các ràng buộc cân bằng đảm bảo nhiệt độ mục tiêu chính xác và các ràng buộc không cân bằng để giữ gradient nhiệt độ nhỏ, kết quả cho thấy tần số khởi điểm tỉ lệ thuận với nhiệt độ mục tiêu và tỷ lệ nghịch với thời gian gia nhiệt, trong khi $f(t)$ giảm nhẹ theo thời gian để tránh quá nhiệt. Đồ thị nhiệt độ $T(r, t)$ thể hiện phân bố đồng đều theo bán kính, gradient nhiệt dưới $0,03K$ và biến thiên tần số dưới $0,2Hz$ khẳng định độ trơn tru của luật điều khiển và hiệu quả mô hình hóa. Kết quả đã chứng minh tính khả thi và độ ổn định cao của phương pháp cho các kịch bản nhiệt độ 200°C – 500°C trong thời gian mong muốn 5s và 10s và mở ra tiền đề áp dụng cho các quy trình gia nhiệt công nghiệp yêu cầu cao về độ đồng nhất và tốc độ. Trong các nghiên cứu tiếp theo, chúng tôi sẽ mở rộng mô hình lên 2-D (r–z) để xem xét dẫn nhiệt dọc trục, ảnh hưởng điều kiện biên đầu–cuối và phát triển chiến lược điều khiển đa tham số, hướng tới ứng dụng thực tế trong chế tác phụ gia, xử lý nhiệt bán dẫn và vật liệu composite.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] S. Midson and K. Brissing, "Semi-solid casting of aluminum alloys: a status report," *Mod. Cast.*, vol. 87, pp. 41–43, 1997.
- [2] S. Midson, V. Rudnev, and R. Gallik, "Semi-solid processing of aluminum alloys," *Ind. Heat.*, vol. 1, pp. 37–41, 1999.
- [3] H. K. Jung and C. G. Kang, "Induction heating process of an Al–Si aluminum alloy for semi-solid die casting and its resulting microstructure," *J. Mater. Process. Technol.*, vol. 120, pp. 355–364, 2002.
- [4] Y. Ono, C. Q. Zheng, F. G. Hamel, R. Charron, and C. A. Loong, "Experimental investigation on monitoring and control of induction heating process for semi-solid alloys using the heating coil as sensor," *Meas. Sci. Technol.*, vol. 13, pp. 1359–1365, 2002.
- [5] D.-C. Ko, G.-S. Min, B.-M. Kim, and J.-C. Choi, "Finite element analysis for the semi-solid state forming of aluminum alloy considering induction heating," *J. Mater. Process. Technol.*, vol. 100, pp. 95–104, 2000.
- [6] M. C. Flemings, "Behavior of metal alloys in the semi-solid state," *Metall. Trans. A*, vol. 22, pp. 957–981, 1991.
- [7] K. T. Nguyen and A. Bendada, "An inverse approach for the prediction of the temperature evolution during induction heating of a semi-solid casting billet," *Modell. Simul. Mater. Sci. Eng.*, vol. 8, pp. 857–870, 2000.
- [8] S. Midson, V. Rudnev, and R. Gallik, "The induction heating of semi-solid aluminum alloys," in: *Proceedings of the Fifth International Conference on Semi-Solid Processing of Alloys and Composites*, Golden, CO, 1998, pp. 497–504.
- [9] A. Bendada, K. T. Nguyen, and C. A. Loong, "Application of infrared imaging in optimizing the induction heating of semi-solid aluminum alloys," in *Proceedings of the International Symposium on Advanced Sensors for Metals Processing*, Quebec, 1999, pp. 331–342.
- [10] P. Kapranos, R. C. Gibson, D. H. Kirkwood, and C. M. Sellars, "Induction heating and partial melting of high melting point thixoformable alloys," in *Proceedings of the Fourth International Conference on Semi-Solid Processing of Alloys and Composites*, Sheffield, 1996, pp. 148–152.
- [11] A. G. Butkovskii and A. Y. Lerner, "The optimal control systems with distributed parameter," *Auto. Remote Control*, vol. 21, pp. 472–477, 1960.
- [12] Y. Sakawa, "Solution of an optimal control problem in a distributed parameter system," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 9, pp. 420–426, 1964.
- [13] Y. Sakawa, "Optimal control of a certain type of linear distributed-parameter system," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 11, pp. 35–41, 1966.
- [14] R. K. Cavin and S. C. Tandon, "Distributed parameter system optimum control design via finite element discretization," *Automatica*, vol. 13, pp. 611–614, 1977.
- [15] R. A. Meric, "Finite element analysis of optimal heating of a slab with temperature dependent thermal conductivity," *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 22, pp. 1347–1353, 1979.
- [16] R. A. Meric, "Finite element and conjugate gradient methods for a nonlinear optimal heat transfer control problem," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 14, pp. 1851–1863, 1979.
- [17] C. T. Kelley and E. W. Sachs, "A trust region method for parabolic boundary control problems," *SIAM J. Optimization*, vol. 9, pp. 1064–1081, 1999.
- [18] C. H. Huang, "A nonlinear optimal control problem in determining the strength of the optimal boundary heat fluxes," *Numer. Heat Transfer Part B*, vol. 40, pp. 411–429, 2001.
- [19] C. H. Huang and C. Y. Li, "A three-dimensional optimal control problem in determining the boundary control heat fluxes," *Heat Mass Transfer*, vol. 39, pp. 589–598, 2003.
- [20] C. J. Chen and M. N. Ozisik, "Optimal heating of a slab with a plane heat source of timewise varying strength," *Numer. Heat Transfer Part A*, vol. 21, pp. 351–361, 1992.
- [21] X. Cui et al., "Analysis and optimization of induction heating processes," *Applied Energy*, vol. 321, pp. 1–10, 2022.
- [22] P. Garois et al., "Data-Driven Inverse Problem for Optimizing Double-Frequency Induction Heating," *Metals*, vol. 13, pp. 1–15, 2023.
- [23] M. Zarghoon et al., "Full-state feedback LQR with integral gain for control of induction heating of steel billet," *Engineering Science and Technology, an International Journal*, vol. 55, pp. 1–14, 2024.
- [24] B. Heinrich, "Efficient induction heating frequency analysis," Master Thesis, Technische Universität Wien, Mat.No. 11826363, 2023.
- [25] V. I. Lusgin et al., "Energy-efficient installations of multi-zone multi-frequency induction heating of steel billets for large deformation," *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, vol. 950, pp. 1–11, 2020.
- [26] H. Ghafoorinejad et al., "Cascade deep learning approach for design and control optimization of a dual-frequency induction heating device," *Energies*, vol. 18, pp. 1–19, 2025.