

FRACTAL DIMENSION OF RANDOM ATTRACTOR FOR THREE-DIMENSIONAL STOCHASTIC GLOBALLY MODIFIED NAVIER-STOKES EQUATIONS

Pham Tri Nguyen

Electric Power University

ARTICLE INFO		ABSTRACT
Received:	23/12/2025	The existence and properties of random attractor types have been studied for several classes of stochastic nonlinear partial differential equations such as the reaction diffusion equation, the weakly damped wave equation, the two dimensional Navier-Stokes equation, the g-Navier-Stokes equation,... However, for many important classes of stochastic nonlinear partial differential equations in fluid mechanics, the existence and properties of random attractor types remain unstudied. In this paper, we study the three dimensional stochastic global modified Navier-Stokes equations with additive noise in the bounded domain. Using the one dimensional Ornstein-Uhlenbeck equation, by using appropriate variable substitution, we transform the stochastic system of equations into a deterministic form with random parameters. First, we define a stochastic dynamical system via the unique weak solution of the system. Next, we prove the existence and uniqueness of random global attractor of the system. Finally, we estimate the finiteness of the Fractal dimension of the random attractor.
Revised:	03/02/2026	
Published:	08/02/2026	
KEYWORDS		
Navier-Stokes equations		
Random attractor		
Bounded domain		
Additive noise		
Fractal dimension		

SỐ CHIỀU FRACTAL CỦA TẬP HÚT NGẪU NHIÊN CHO HỆ NAVIER-STOCKES CẢI BIÊN TOÀN CỤC NGẪU NHIÊN BA CHIỀU

Phạm Trí Nguyễn

Trường Đại học Điện lực

THÔNG TIN BÀI BÁO	TÓM TẮT	
Ngày nhận bài: 23/12/2025 Ngày hoàn thiện: 03/02/2026 Ngày đăng: 08/02/2026	Sự tồn tại và tính chất của các loại tập hút ngẫu nhiên đã được nghiên cứu cho một số lớp phương trình đạo hàm riêng ngẫu nhiên phi tuyến như phương trình phản ứng khuếch tán, phương trình truyền sóng tắt dần yếu, phương trình Navier-Stokes hai chiều, phương trình g-Navier-Stokes,... Tuy nhiên, với nhiều lớp phương trình đạo hàm riêng phi tuyến ngẫu nhiên quan trọng trong cơ học chất lỏng, sự tồn tại và tính chất của các loại tập hút ngẫu nhiên vẫn chưa được nghiên cứu. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu hệ phương trình Navier-Stokes cải biên toàn cục ngẫu nhiên ba chiều với nhiễu cộng tính trong miền bị chặn. Sử dụng phương trình Ornstein-Uhlenbeck một chiều, bằng phép đổi biến thích hợp chúng tôi chuyển hệ phương trình ngẫu nhiên về dạng tắt định với các tham số ngẫu nhiên. Đầu tiên, chúng tôi định nghĩa một hệ động lực ngẫu nhiên thông qua nghiệm yếu duy nhất của hệ. Tiếp theo, chúng tôi chứng minh sự tồn tại duy nhất tập hút toàn cục ngẫu nhiên của hệ. Cuối cùng, chúng tôi đánh giá tính hữu hạn cho số chiều Fractal của tập hút ngẫu nhiên.	
TỪ KHÓA		
Hệ Navier-Stokes		
Tập hút ngẫu nhiên		
Miền bị chặn		
Nhiều cộng tính		
Số chiều Fractal		

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.14315>

Email: nguyench13@gmail.com

<http://jst.tnu.edu.vn>

196

Email: jst@tnu.edu.vn

1. Mở đầu

Tập hút ngẫu nhiên là một trong những công cụ rất hữu ích để nghiên cứu về dáng điệu tiệm cận cũng như các tính chất của các hệ động lực ngẫu nhiên, chẳng hạn ta có thể tham khảo [1] - [8] và các tài liệu được trích dẫn trong đó. Hơn nữa, số chiều hữu hạn của tập hút là một trong những thuộc tính quan trọng nhất trong việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của hệ động lực vô hạn chiều (xem [1], [3], [8]). Nội dung của nghiên cứu này nhằm chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục ngẫu nhiên của hệ Navier-Stokes cải biên toàn cục ngẫu nhiên ba chiều và chỉ ra tính hữu hạn cho số chiều Fractal của tập hút ngẫu nhiên.

Cho Θ là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ với biên $\partial\Theta$, $t > 0$. Xét hệ phương trình Navier-Stokes cải biên toàn cục ngẫu nhiên ba chiều với nhiều cộng tính có dạng

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \nu \Delta u + F_N(\|u\|) [(u \cdot \nabla)u] + \nabla p = g(x) \frac{dW(t)}{dt}, & x \in \Theta, \\ \nabla \cdot u = 0, & x \in \Theta, \\ u(t, x) = 0, & x \in \partial\Theta, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Theta, \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $u = u(t, x)$ là hàm vận tốc chưa biết của dòng chất lỏng, u_0 là dữ liệu đầu, $p = p(t, x)$ là hàm áp suất, $\nu > 0$ là hệ số nhớt của chất lỏng, $W(t)$ là quá trình Wiener thực, $g \in D(A)$ với A là toán tử Stokes, F_N là hàm cho bởi: $r \in (0, +\infty) \mapsto F_N(r) = \min\{1, Nr^{-1}\}$ với $N > 0$.

2. Phương pháp nghiên cứu

Dùng phép đổi biến thích hợp, ta chuyển hệ ngẫu nhiên về dạng tất định với các tham số ngẫu nhiên. Tiếp theo, bằng cách sử dụng các công cụ của giải tích và các phương pháp của lý thuyết hệ động lực tiêu hao vô hạn chiều ta chứng minh sự tồn tại và duy nhất tập hút toàn cục ngẫu nhiên của hệ và đánh giá tính bị chặn cho số chiều Fractal của tập hút ngẫu nhiên.

3. Kết quả và bàn luận

3.1. Kiến thức chuẩn bị

Cho $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất, với $\Omega = \{\omega \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \omega(0) = 0\}$, $\mathbb{F}$ là sigma đại số Borel, $\mathbb{P}$ là độ đo Wiener trên $(\Omega, \mathbb{F})$, $W(t, \omega) = \omega(t)$, $\{\mathcal{G}_t : t \in \mathbb{R}\}$ là dịch chuyển Wiener trên $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ cho bởi $\mathcal{G}_t \omega(\cdot) = \omega(t + \cdot) - \omega(t)$.

Đặt $\mathcal{V} = \{u \in [C_0^\infty(\mathcal{O})]^2 : \nabla \cdot u = 0\}$, gọi H là bao đóng của $\mathcal{V}$ trong không gian Hilbert $[L^2(\Theta)]^3$ với tích vô hướng $(u, v) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Theta} u_i v_i dx$ và chuẩn $\|u\| = (u, u)^{1/2}$, V là bao đóng của $\mathcal{V}$

trong không gian Hilbert $[H_0^1(\Theta)]^3$ với tích vô hướng $((u, v)) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Theta} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx$ và chuẩn

$\|u\| = ((u, u))^{1/2}$. Gọi V' là không gian đối ngẫu của V , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là ký hiệu đối ngẫu giữa V và V' . Định nghĩa toán tử Stokes $A : V \rightarrow V'$ xác định bởi $\langle Au, v \rangle = ((u, v))$ và toán tử

$B : V \times V \rightarrow V'$ xác định bởi $\langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Theta} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx$. Với những ký hiệu như trên, phương trình đầu trong hệ (1) được viết lại dưới dạng:

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + F_N(\|u\|)B(u, u) = g(x) \frac{dW(t)}{dt}, \quad x \in \Theta. \quad (2)$$

Định nghĩa 3.1. Với mỗi $\omega \in \Omega$ và $u_0 \in H$. Ánh xạ $u(\cdot, \omega, u_0) : [0, +\infty) \rightarrow H$ được gọi là nghiệm yếu của (2) nếu với mọi $T > 0$ thì: $u(\cdot, \omega, u_0) \in C([0, +\infty); H) \cap L^2([0, T]; V)$ và

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + F_N(\|u\|)B(u, u) = g(x) \frac{dW(t)}{dt} \text{ trong } V'.$$

Xét phương trình Ornstein-Uhlenbeck một chiều: $dz(\mathcal{G}_t \omega) + \sigma z(\mathcal{G}_t \omega) dt = dW(t)$, $\sigma > 0$. Chú ý rằng $z(\mathcal{G}_t \omega)$ là liên tục theo t và

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{|z(\mathcal{G}_t \omega)|}{t} = 0; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\gamma t} |z(\mathcal{G}_t \omega)| = 0, \quad \forall \gamma > 0.$$

Ta đưa vào biến mới bằng phép đổi biến

$$y(t, \omega, y_0) = u(t, \omega, u_0) - gz(\mathcal{G}_t \omega); \quad y_0(x) = u_0(x) - gz(\omega). \quad (3)$$

Từ (2) và (3), ta thu được phương trình sau ở dạng tắt định với các hệ số ngẫu nhiên

$$\frac{dy}{dt} + \nu Ay + F_N(\|y + gz(\mathcal{G}_t \omega)\|)B(y + gz(\mathcal{G}_t \omega), y + gz(\mathcal{G}_t \omega)) = z(\mathcal{G}_t \omega)(\sigma g - \nu Ag). \quad (4)$$

Kết quả nghiên cứu trong [9] đã chỉ ra phương trình (4) có duy nhất nghiệm yếu $y(\cdot, \tau, \omega, y_0) \in C([0, +\infty); H) \cap L^2([0, T]; V)$. Ngoài ra, nghiệm $y(t, \omega, y_0)$ liên tục theo dữ liệu đầu y_0 . Ta định nghĩa hệ động lực ngẫu nhiên $\Phi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times H \rightarrow H$, $\Phi(t, \omega, y_0) = y(t, \omega, y_0(\omega))$.

Bổ đề 3.2. (xem [10], [11]) Tồn tại hằng số $\mathbb{k} > 0$ sao cho

- (i) $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$ và $b(u, v, v) = 0$, $\forall u, v, w \in V$,
- (ii) $|b(u, v, w)| \leq \mathbb{k} \|u\| \|v\| |w|^{1/2} \|w\|^{1/2}$, $\forall u, v, w \in V$,
- (iii) $|b(u, v, w)| \leq \mathbb{k} \|u\| \|v\|^{1/2} |Av|^{1/2} |w|$, $\forall u \in V, v \in D(A), w \in H$.

Bổ đề 3.3. (xem [11]) Với mọi $u, v \in V$ và $N > 0$ thì

- (i) $0 \leq \|u\| F_N(\|u\|) \leq N$,
- (ii) $|F_N(\|u\|) - F_N(\|v\|)| \leq N^{-1} F_N(\|u\|) F_N(\|v\|) \|u - v\|$.

Gọi $\mathcal{D}$ là họ các tập con khác rỗng, bị chặn trong H được tham số hóa bởi $\omega \in \Omega$ và thỏa mãn điều kiện tăng chậm: $\forall \omega \in \Omega, \gamma > 0$, $D = \{D(\omega) : \omega \in \Omega\} \in \mathcal{D}$ thì

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\gamma t} \sup_{u \in D(\mathcal{G}_{-t} \omega)} |u| = 0.$$

3.2. Kết quả chính

Từ giờ trở đi, ta ký hiệu C là một hằng số dương nào đó mà giá trị của nó có thể khác nhau trong mỗi lần xuất hiện. Bổ đề dưới đây đưa ra các ước lượng đối với nghiệm y của (4).

Bổ đề 3.4. Với mỗi $\omega \in \Omega, y_0 \in D, D \in \mathcal{D}$, tồn tại $T = T(\omega, D) > 0$ và các biến ngẫu nhiên tăng chậm $M_1(\omega), M_2(\omega), M_3(\omega)$ sao cho với mọi $t \geq T$, nghiệm y của (4) thỏa mãn

$$|y(t, \mathcal{G}_{-t} \omega, y_0(\mathcal{G}_{-t} \omega))|^2 \leq M_1^2(\omega), \quad (5)$$

$$\int_{t-1}^t \|y(s, \mathcal{G}_{-t}\omega, y_0(\mathcal{G}_{-t}\omega))\|^2 ds \leq M_2^2(\omega), \quad (6)$$

$$\|y(t, \mathcal{G}_{-t}\omega, y_0(\mathcal{G}_{-t}\omega))\|^2 \leq M_3^2(\omega). \quad (7)$$

Chứng minh. Nhân hai vế của (4) với $y(t) = y(t, \omega, y_0(\omega))$, ta được

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|y\|^2 + 2\nu \|y\|^2 \leq & -2F_N(\|y + gz(\mathcal{G}_t\omega)\|) b(y + gz(\mathcal{G}_t\omega), y + gz(\mathcal{G}_t\omega), y) \\ & + 2z(\mathcal{G}_t\omega)(\sigma g - \nu Ag, y). \end{aligned} \quad (8)$$

Áp dụng Bổ đề 3.2, Bổ đề 3.3, các bất đẳng thức Poincaré và Young ta có các đánh giá sau

$$2F_N(\|y + gz(\mathcal{G}_t\omega)\|) |b(y + gz(\mathcal{G}_t\omega), y + gz(\mathcal{G}_t\omega), y)| \leq \frac{\nu}{4} \|y\|^2 + C \|z(\mathcal{G}_t\omega)\|^2,$$

$$2 |z(\mathcal{G}_t\omega)(\sigma g - \nu Ag, y)| \leq \frac{\nu\lambda_1}{4} \|y\|^2 + C \|z(\mathcal{G}_t\omega)\|^2,$$

với λ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử A . Thay các đánh giá trên vào (8) ta nhận được

$$\frac{d}{dt} \|y\|^2 + \nu\lambda_1 \|y\|^2 + \frac{\nu}{2} \|y\|^2 \leq C \|z(\mathcal{G}_t\omega)\|^2. \quad (9)$$

Bỏ qua số hạng thứ ba trong vế phải của (9), sau đó áp dụng bất đẳng thức Gronwall trên $[0, r]$, $r > 0$, rồi thay ω bởi $\mathcal{G}_{-t}\omega$ ta được

$$\|y(r, \mathcal{G}_{-t}\omega, y_0(\mathcal{G}_{-t}\omega))\|^2 \leq e^{-\nu\lambda_1 r} \|y_0(\mathcal{G}_{-t}\omega)\|^2 + C \int_0^r e^{-\nu\lambda_1(r-s)} \|z(\mathcal{G}_{s-t}\omega)\|^2 ds. \quad (10)$$

Cho $r = t$ trong (10) ta có

$$\|y(t, \mathcal{G}_{-t}\omega, y_0(\mathcal{G}_{-t}\omega))\|^2 \leq e^{-\nu\lambda_1 t} \|y_0(\mathcal{G}_{-t}\omega)\|^2 + C \int_{-t}^0 e^{\nu\lambda_1 s} \|z(\mathcal{G}_s\omega)\|^2 ds. \quad (11)$$

Mặt khác $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\nu\lambda_1 t} \|y_0(\mathcal{G}_{-t}\omega)\|^2 = 0$, kết hợp với (11) suy ra tồn tại $T = T(\omega, D) > 0$ và biến

ngẫu nhiên tăng chậm $M_1^2(\omega) = 1 + C \int_{-\infty}^0 e^{\nu\lambda_1 s} \|z(\mathcal{G}_s\omega)\|^2 ds$ sao cho với mọi $t \geq T$ ta có (5). Từ

(10), thay $r = t - 1 \geq 0$ ta được

$$\|y(t-1, \mathcal{G}_{-t}\omega, y_0(\mathcal{G}_{-t}\omega))\|^2 \leq e^{-\nu\lambda_1(t-1)} \|y_0(\mathcal{G}_{-t}\omega)\|^2 + C e^{\nu\lambda_1} \int_{-t}^{-1} e^{\nu\lambda_1 s} \|z(\mathcal{G}_s\omega)\|^2 ds. \quad (12)$$

Ta lại áp dụng bất đẳng thức Gronwall cho (9) trên $[t-1, t]$ và thu được

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2} \int_{t-1}^t e^{-\nu\lambda_1(t-s)} \|y(s, \mathcal{G}_{-t}\omega, y_0(\mathcal{G}_{-t}\omega))\|^2 ds \leq & e^{-\nu\lambda_1} \|y(t-1, \mathcal{G}_{-t}\omega, y_0(\mathcal{G}_{-t}\omega))\|^2 \\ & + C \int_{t-1}^t e^{-\nu\lambda_1(t-s)} \|z(\mathcal{G}_{s-t}\omega)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Kết hợp đánh giá trên và (12) ta suy ra

$$\int_{t-1}^t e^{-\nu\lambda_1(t-s)} \|y(s, \mathcal{G}_{-t}\omega, y_0(\mathcal{G}_{-t}\omega))\|^2 ds \leq \frac{2}{\nu} e^{-\nu\lambda_1 t} \|y_0(\mathcal{G}_{-t}\omega)\|^2 + C \int_{-\infty}^0 e^{\nu\lambda_1 s} \|z(\mathcal{G}_s\omega)\|^2 ds. \quad (13)$$

Vì $t-1 \leq s \leq t$ nên $e^{-\nu\lambda_1(t-s)} \geq e^{-\nu\lambda_1}$. Từ (13) ta thu được (6) với mọi $t \geq T(\omega, D)$, trong đó $M_2^2(\omega) = CM_1^2(\omega)$. Tiếp theo, ta nhân (4) với Ay

$$\frac{d}{dt} \|y\|^2 + 2\nu \|Ay\|^2 = -2F_N(\|y + gz(\mathcal{G}_t\omega)\|)b(y + gz(\mathcal{G}_t\omega), y + gz(\mathcal{G}_t\omega), Ay) + z(\mathcal{G}_t\omega)(\sigma g - \nu Ag, Ay). \quad (14)$$

Áp dụng Bổ đề 3.2, Bổ đề 3.3 và bất đẳng thức Young ta có các đánh giá sau

$$|2F_N(\|y + gz(\mathcal{G}_t\omega)\|)b(y + gz(\mathcal{G}_t\omega), y + gz(\mathcal{G}_t\omega), Ay)| \leq \frac{3\nu}{4} \|Ay\|^2 + C\|y\|^2 + C\|z(\mathcal{G}_t\omega)\|^2,$$

$$|z(\mathcal{G}_t\omega)(\sigma g - \nu Ag, Ay)| \leq \frac{\nu}{4} \|Ay\|^2 + C\|z(\mathcal{G}_t\omega)\|^2.$$

Thay các đánh giá trên vào (14) ta suy ra

$$\frac{d}{dt} \|y\|^2 \leq C\|y\|^2 + C\|z(\mathcal{G}_t\omega)\|^2. \quad (15)$$

Lấy $t \geq T \geq 1$ và $s \in [t-1, t]$, tích phân (15) trên $[s, t]$ rồi sử dụng (6) ta được

$$\|y(t)\|^2 \leq \|y(s)\|^2 + CM_2^2(\omega) + C \int_{t-1}^t \|z(\mathcal{G}_{s-t}\omega)\|^2 ds. \quad (16)$$

Tích phân (16) trên $[t-1, t]$ ta suy ra (7), trong đó $M_3^2(\omega) = CM_2^2(\omega) + C \int_{-1}^0 \|z(\mathcal{G}_s\omega)\|^2 ds$. $\square$

Kết quả tiếp theo chỉ ra sự tồn tại và duy nhất tập hút toàn cục ngẫu nhiên của hệ động lực ngẫu nhiên Φ sinh bởi nghiệm của (4).

Bổ đề 3.5. *Hệ động lực ngẫu nhiên Φ sinh bởi nghiệm của (4) có duy nhất một tập hút toàn cục ngẫu nhiên $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(\omega) : \omega \in \Omega\}$ trong H .*

Chứng minh. Với mỗi $\omega \in \Omega$, ta đặt $B_0(\omega) = \{y \in H : \|y\| \leq M_1(\omega)\}$ và $B_1(\omega) = \{y \in V : \|y\| \leq M_3(\omega)\}$. Từ Bổ đề 3.4 và định lý nhúng compact nhúng V vào H ta thấy B_1 là tập compact hấp thụ của Φ trong H . Do $M_1(\omega)$ và $M_3(\omega)$ là các biến ngẫu nhiên nên $B_0(\omega)$ và $B_1(\omega)$ là đo được. Áp dụng Định lý 2.4 [3] ta suy ra Φ có duy nhất một tập hút toàn cục ngẫu nhiên $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(\omega) : \omega \in \Omega\} \subset B_0(\omega) \cap B_1(\omega)$. $\square$

Ta nhắc lại khái niệm về số chiều Fractal của tập compact trong không gian Banach.

Định nghĩa 3.6. *Giả sử X là không gian Banach và K là tập compact trong X . Cho $\varepsilon > 0$, ta ký hiệu $N_\varepsilon(K)$ là số tối thiểu các hình cầu mở trong X với bán kính ε cần thiết để bao phủ K . Khi đó số chiều Fractal của K , ký hiệu là $\dim_F(K)$, được định nghĩa bởi*

$$\dim_F(K) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N_\varepsilon(K))}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Gọi $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ là một cơ sở trực chuẩn của $[L^2(\Theta)]^3$ bao gồm các hàm riêng của toán tử Stokes A tương ứng với các giá trị riêng $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Với mỗi $m \in \mathbb{N}$, đặt $H_m(\Theta) = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ và xét phép chiếu trực giao $P_m : L^2(\Theta) \rightarrow H_m(\Theta)$.

Dưới đây là một phương pháp đánh giá tính bị chặn cho số chiều Fractal của tập hút ngẫu nhiên $\mathcal{A}(\omega)$.

Mệnh đề 3.7. (xem [3]) *Tồn tại phép chiếu trực giao P_m , biến ngẫu nhiên $R_0(\omega)$ với kỳ vọng toán $\mathbb{E}(R_0(\omega)) < \ln\left(\frac{1}{\delta}\right)$, $0 < \delta < 1$. Khi đó nếu với mọi $v_1, v_2 \in \mathcal{A}(\omega)$,*

$$\begin{aligned} |P_m \Phi(1, \omega, v_1) - P_m \Phi(1, \omega, v_2)| &\leq e^{\int_0^1 R_0(\mathcal{G}_s \omega) ds} |v_1 - v_2|, \\ |Q_m \Phi(1, \omega, v_1) - Q_m \Phi(1, \omega, v_2)| &\leq \delta e^{\int_0^1 R_0(\mathcal{G}_s \omega) ds} |v_1 - v_2|, \end{aligned}$$

$Q_m = I - P_m$, thì $\dim_F(\mathcal{A}(\omega)) < +\infty$.

Bổ đề 3.8. Giả sử y_1, y_2 là các nghiệm của (4). Khi đó với mỗi $\omega \in \Omega$, tồn tại $R(\omega)$ sao cho

$$|y_1(t) - y_2(t)|^2 + \int_0^t \|y_1(s) - y_2(s)\|^2 ds \leq e^{\int_0^t R(\mathcal{G}_s \omega) ds} |y_1(0) - y_2(0)|^2. \quad (17)$$

Chứng minh. Đặt $w = y_1 - y_2$, từ (4) ta có

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} + \nu A w &= -F_N(\|y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega)\|) B(y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega), y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega)) \\ &\quad + F_N(\|y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega)\|) B(y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega), y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega)). \end{aligned} \quad (18)$$

Nhân hai vế của (18) với w ta suy ra

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|^2 + \nu \|w\|^2 &= -F_N(\|y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega)\|) b(y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega), y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega), w) \\ &\quad + F_N(\|y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega)\|) b(y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega), y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega), w). \end{aligned} \quad (19)$$

Áp dụng bất đẳng thức Young, Bổ đề 3.2 và Bổ đề 3.3, ta có đánh giá

$$\begin{aligned} &|F_N(\|y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega)\|) b(y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega), y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega), w) \\ &\quad + F_N(\|y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega)\|) b(y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega), y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega), w)| \leq \frac{\nu}{3} \|w\|^2 + C |w|^2. \end{aligned}$$

Thay đánh giá trên vào (19) ta được

$$\frac{d}{dt} |w|^2 + \frac{4\nu}{3} \|w\|^2 \leq C |w|^2. \quad (20)$$

Bỏ đi số hạng thứ hai trong vế trái (20) rồi áp dụng bất đẳng thức Gronwall trên $[0, t]$ ta suy ra

$$|w(t)|^2 \leq e^{Ct} |w(0)|^2. \quad (21)$$

Tiếp theo, ta lấy tích phân (20) trên $[0, t]$

$$\frac{4\nu}{3} \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq |w(0)|^2 + C \int_0^t |w(s)|^2 ds \leq C \left(1 + \int_0^t e^{Cs} ds\right) |w(0)|^2.$$

Từ $1 + x \leq e^x, \forall x \geq 0$ và đánh giá ở trên ta suy ra tồn tại biến ngẫu nhiên $R(\omega)$ sao cho

$$\int_0^t \|w(s)\|^2 ds \leq e^{\int_0^t R(\mathcal{G}_s \omega) ds} |w(0)|^2. \quad (22)$$

Kết hợp (21) và (22) ta nhận được (17). $\square$

Bổ đề 3.9. Tồn tại biến ngẫu nhiên $R_0(\omega)$ và $0 < \delta < 1$ sao cho với mọi $t \geq 0$ và $y_{1,0}, y_{2,0} \in \mathcal{A}(\omega)$ ta có

$$|P_m \Phi(t, \omega, y_{1,0}) - P_m \Phi(t, \omega, y_{2,0})| \leq e^{\int_0^t R_0(\mathcal{G}_s \omega) ds} |y_{1,0} - y_{2,0}| \quad (23)$$

$$|Q_m \Phi(t, \omega, y_{1,0}) - Q_m \Phi(t, \omega, y_{2,0})| \leq \delta e^{\int_0^t R_0(\mathcal{G}_s \omega) ds} |y_{1,0} - y_{2,0}|. \quad (24)$$

Chứng minh. Do $|P_m(v)| \leq |v|, \forall v \in H$, nên từ (17) ta suy ra (23). Từ Bổ đề 3.2 và Bổ đề 3.3, ta suy ra tồn tại biến ngẫu nhiên $\hat{R}(\omega)$ sao cho $\|y_i\| \leq \hat{R}(\omega)$ ($i = 1, 2$). Nhân (18) với $Q_m w$ ta được

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Q_m w\|^2 + \nu \|Q_m w\|^2 \\ &= - \left[F_N(\|y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega)\|) - F_N(\|y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega)\|) \right] b(y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega), y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega), Q_m w) \\ & \quad - F_N(\|y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega)\|) [b(y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega), w, Q_m w) + b(w, y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega), Q_m w)]. \end{aligned} \quad (25)$$

Áp dụng bất đẳng thức Young, Bổ đề 3.2 và Bổ đề 3.3, ta có các đánh giá

$$\begin{aligned} & \left| \left[F_N(\|y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega)\|) - F_N(\|y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega)\|) \right] b(y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega), y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega), Q_m w) \right| \\ & \leq \frac{\nu}{4} \|Q_m w\|^2 + \beta \|w\|^2 + C_\beta (\|y_1\|^4 + |z(\mathcal{G}_t \omega)|^4) |w|^2, \\ & \left| F_N(\|y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega)\|) [b(y_1 + gz(\mathcal{G}_t \omega), w, Q_m w) + b(w, y_2 + gz(\mathcal{G}_t \omega), Q_m w)] \right| \\ & \leq \frac{\nu}{2} \|Q_m w\|^2 + 2\beta \|w\|^2 + C_\beta (\|y_1\|^4 + \|y_2\|^4 + |z(\mathcal{G}_t \omega)|^4) |w|^2, \end{aligned}$$

với $\beta > 0$ bất kỳ. Thay các đánh giá trên vào (25) ta suy ra

$$\frac{d}{dt} \|Q_m w\|^2 \leq -\frac{\nu \lambda_{m+1}}{2} \|Q_m w\|^2 + 3\beta \|w\|^2 + C_\beta (\hat{R}^4(\mathcal{G}_t \omega) + |z(\mathcal{G}_t \omega)|^2) |w|^2. \quad (26)$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall cho (26) trên $[0, t]$ ta nhận được

$$\begin{aligned} \|Q_m w(t)\|^2 & \leq e^{-\frac{\nu \lambda_{m+1}}{2} t} \|Q_m w(0)\|^2 + 3\beta \int_0^t e^{-\frac{\nu \lambda_{m+1}}{2}(t-s)} \|w(s)\|^2 ds \\ & \quad + C_\beta \int_0^t e^{-\frac{\nu \lambda_{m+1}}{2}(t-s)} (\hat{R}^4(\mathcal{G}_s \omega) + |z(\mathcal{G}_s \omega)|^4) |w(s)|^2 ds. \end{aligned} \quad (27)$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\frac{\nu \lambda_{m+1}}{2}(t-s)} (\hat{R}^4(\mathcal{G}_s \omega) + |z(\mathcal{G}_s \omega)|^4) ds & \leq \left(\int_0^t (\hat{R}^4(\mathcal{G}_s \omega) + |z(\mathcal{G}_s \omega)|^4)^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t e^{-\nu \lambda_{m+1}(t-s)} ds \right)^{1/2} \\ & \leq \sqrt{\frac{2}{\nu \lambda_{m+1}}} \left(\int_0^t (\hat{R}^8(\mathcal{G}_s \omega) + |z(\mathcal{G}_s \omega)|^8) ds \right)^{1/2} \leq \sqrt{\frac{2}{\nu \lambda_{m+1}}} e^{\int_0^t (\hat{R}^8(\mathcal{G}_s \omega) + |z(\mathcal{G}_s \omega)|^8) ds}. \end{aligned}$$

Kết hợp đánh giá trên với (27), Bổ đề 3.8, rút gọn ta thu được

$$\|Q_m w(t)\|^2 \leq \left(e^{-\frac{\nu \lambda_{m+1}}{2} t} + 3\beta + \sqrt{\frac{2}{\nu \lambda_{m+1}}} e^{\int_0^t R_0(\mathcal{G}_s \omega) ds} \right) |w(0)|^2, \quad (28)$$

Với $R_0(\mathcal{G}_s \omega) = \max \{R(\mathcal{G}_s \omega), \hat{R}^s(\mathcal{G}_s \omega) + |z(\mathcal{G}_s \omega)|^8\}$. Từ (28), cho $t = 1$ và chú ý rằng $\lambda_m \rightarrow +\infty$ khi $m \rightarrow +\infty$, ta suy ra (24). $\square$

Ta phát biểu kết quả chính của nghiên cứu về tính bị chặn cho số chiều Fractal của tập hút ngẫu nhiên.

Định lý 3.10. Tập hút ngẫu nhiên $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(\omega) : \omega \in \Omega\}$ của hệ động lực ngẫu nhiên Φ sinh bởi nghiệm của (4) có số chiều Fractal hữu hạn.

Chứng minh. Xét biến ngẫu nhiên $R_0(\omega)$ với kỳ vọng toán $\mathbb{E}(R_0(\omega)) < \ln(\delta^{-1})$ và

$$0 < \delta = e^{-\frac{v_{m+1}^2}{2}} + 3\beta + \sqrt{\frac{2}{v\lambda_{m+1}}} < 1.$$

Sử dụng Mệnh đề 3.7 và Bổ đề 3.9 ta suy ra điều cần chứng minh. $\square$

4. Kết luận

Các kết quả chính của nghiên cứu thể hiện ở Bổ đề 3.5 và Định lý 3.10, trong đó các kết quả đã chỉ ra sự tồn tại và duy nhất tập hút toàn cục ngẫu nhiên của hệ Navier-Stokes cải biên toàn cục ngẫu nhiên ba chiều với nhiễu cộng tính và đánh giá tính bị chặn cho số chiều Fractal của tập hút ngẫu nhiên. Các kết quả này có ý nghĩa quan trọng trong việc nghiên cứu đáng điều kiện tiệm cận của hệ động lực ngẫu nhiên sinh bởi lớp hệ này. Trong hướng nghiên cứu tiếp theo chúng tôi sẽ tìm cách đánh giá chặn trên tốt hơn cho số chiều Fractal của tập hút ngẫu nhiên.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được Trường Đại học Điện lực tài trợ thông qua đề tài nghiên cứu khoa học với mã số đề tài ĐTKHCN.25/2025.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] Q. Chang, D. Li, and C. Sun, "Random attractors for stochastic time-dependent damped wave equations with critical exponents," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, no. 7, pp. 2793-2824, 2020.
- [2] Z. Chen, D. Yang, and S. Zhong, "Weak mean attractor and periodic measure for stochastic lattice systems driven by Lévy noises," *Stoch. Anal. Appl.*, no. 41, pp. 509-544, 2023.
- [3] N. T. Da and D. V. Loi, "On the random attractor for stochastic 2D hydrodynamical type equations with additive white noise," *Stochastic*, vol. 95, no. 3, pp. 356-376, 2023.
- [4] X. Feng and B. You, "Random attractors for the two-dimensional stochastic g-Navier-Stokes equations," *Stochastics*, vol. 92, no. 4, pp. 613-626, 2020.
- [5] K. Kinra and M.T. Mohan, "Random attractors and invariant measures for stochastic convective Brinkman-Forchheimer equations on 2D and 3D unbounded domains," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, vol. 29, no. 1, pp. 377-425, 2024.
- [6] J. Slavik, "Attractors for stochastic reaction-diffusion equation with additive homogeneous noise," *Czechoslovak Math. J.*, vol. 71, no. 146, pp. 21-43, 2021.
- [7] R. Wang, K. Kinra, and M. T. Mohan, "Asymptotically autonomous robustness in probability of random attractors for stochastic Navier-Stokes equations on unbounded Poincaré domains," *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 55, no. 4, pp. 2644-2676, 2023.
- [8] S. Zhou and M. Zhao, "Fractal dimension of random invariant sets for nonautonomous random dynamical systems and random attractor for stochastic damped wave equation," *Nonlinear Anal.*, no. 133, pp. 292-318, 2016.
- [9] H. T. Hang and P. T. Nguyen, "Existence and unique weak solution for three-dimensional stochastic globally modified Navier-Stokes equations on unbounded domain," (in Vietnamese), *TNU Journal of Science and Technology*, vol. 229, no. 2, pp. 206-213, 2024.
- [10] P. E. Kloeden, J. A. Langa, and J. Real, "Pullback V -attractors of the three dimensional system of nonautonomous globally modified Navier-Stokes equations: existence and finite fractal dimension," *Commun. Pure Appl. Anal.*, no. 6, pp. 937-955, 2007.
- [11] M. Romito, "The uniqueness of weak solutions of the globally modified Navier-Stokes equations," *Adv. Nonlinear Stud.*, no. 9, pp. 425-427, 2009.