

SOME PROPERTIES OF THE INCOMPLETE ARC TOURNAMENTS THAT DO NOT HAVE DISJOINT CYCLES OF DIFFERENT

Vu Thi Tuyet Mai*, Le Nhu Hien, Mai Thanh Hong, Tran Hung Cuong, Le Xuan Hung

Hanoi University of Industry

ARTICLE INFO		ABSTRACT
Received:	21/4/2026	The problem of studying the existence of disjoint cycles in directed graphs has been studied since 1983 by C. Thomassen. In 2012, Henning and Yeo extended the problem by studying the existence of disjoint cycles of different lengths in directed graphs. To date, this problem has yielded many profound and interesting results for different classes of graphs, notably tournaments, k -part tournaments, local tournaments, etc. In this paper, we will continue to study the existence of disjoint cycles of different lengths for the class of incomplete arc tournaments (which can be considered an extension of the class of tournaments). The main result is the proof of several important properties of the class of incomplete arc tournaments when they are strongly connected, have a minimum degree of 3, and do not have disjoint cycles of different lengths.
Revised:	15/6/2026	
Published:	17/6/2026	
KEYWORDS		
Tournament		
Strong digraph		
Incomplete arc tournament		
Vertex-disjoint cycles		
Cycles of different lengths		

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA ĐỒ THỊ GIẢI ĐẤU KHUYẾT CUNG KHÔNG CÓ CÁC CHU TRÌNH RỜI NHAU VỚI ĐỘ DÀI KHÁC NHAU

Vũ Thị Tuyết Mai*, Lê Như Hiền, Mai Thanh Hồng, Trần Hùng Cường, Lê Xuân Hùng

Đại học Công nghiệp Hà Nội

THÔNG TIN BÀI BÁO		TÓM TẮT
Ngày nhận bài:	21/4/2026	Bài toán nghiên cứu sự tồn tại các chu trình rời nhau trong đồ thị có hướng được nghiên cứu từ năm 1983 bởi C. Thomassen. Năm 2012, Henning và Yeo mở rộng bài toán bằng việc nghiên cứu sự tồn tại các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau trong đồ thị có hướng. Cho đến nay, bài toán này đã thu được nhiều kết quả sâu sắc và thú vị cho những lớp đồ thị khác nhau, tiêu biểu là các lớp đồ thị giải đấu, đồ thị giải đấu k phần, đồ thị giải đấu bộ phận,... Trong bài báo này, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu sự tồn tại các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau cho lớp đồ thị giải đấu khuyết cung (có thể coi như là một mở rộng của lớp đồ thị giải đấu). Kết quả chính đạt được là chứng minh một số tính chất quan trọng của lớp đồ thị giải đấu khuyết cung khi nó liên thông mạnh, có bậc ra nhỏ nhất bằng 3 và không có các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau.
Ngày hoàn thiện:	15/6/2026	
Ngày đăng:	17/6/2026	
TỪ KHÓA		
Đồ thị giải đấu		
Đồ thị liên thông mạnh		
Đồ thị giải đấu khuyết cung		
Chu trình rời nhau		
Chu trình có độ dài khác nhau		

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.15509>

* Corresponding author. Email: maivtt@hau.edu.vn

1. Giới thiệu

Trong lĩnh vực khoa học máy tính và toán học, đồ thị có hướng đóng vai trò quan trọng trong mô hình hóa các bài toán thực tế. Chúng được ứng dụng rộng rãi để giải quyết hàng loạt bài toán thực tiễn, từ việc thiết kế cấu trúc dữ liệu, thuật toán tìm đường, sắp xếp tô-pô, cho đến việc phân tích mạng xã hội hay phát triển các bộ máy tìm kiếm.

Nghiên cứu này tập trung khảo sát các đồ thị có hướng với tập đỉnh hữu hạn, không chứa khuyên, không có cung bội và không tồn tại chu trình độ dài bằng 2. Giả sử $D=(V,A)$ là một đồ thị có hướng với V là tập đỉnh và A là tập cung. Đỉnh $v \in V$ gọi là *láng giềng ra* (tương ứng, *láng giềng vào*) của đỉnh $u \in V$ nếu $(u,v) \in A$ (tương ứng, $(v,u) \in A$). Chúng ta ký hiệu tập tất cả các láng giềng ra (tương ứng, láng giềng vào) của u là $N_D^+(u)$ hoặc $N^+(u)$ (tương ứng, $N_D^-(u)$ hoặc $N^-(u)$), $d^+(u) = |N_D^+(u)|$ (tương ứng, $d^-(u) = |N_D^-(u)|$) gọi là *bậc ra* (tương ứng, *bậc vào*) của u , $\min\{d_D^+(u) | u \in V\}$ (tương ứng, $\min\{d_D^-(u) | u \in V\}$) gọi là *bậc ra nhỏ nhất* (tương ứng, *bậc vào nhỏ nhất*) của D . Nếu u và v là hai đỉnh thuộc V sao cho $(u,v) \in A$ hoặc $(v,u) \in A$ thì ta nói u, v là *kề nhau*. Nếu $W \subseteq V$ thì đồ thị con của D cảm sinh bởi tập W được ký hiệu là $D[W]$. Đồ thị có hướng $D=(V,A)$ gọi là *liên thông mạnh* nếu với mọi cặp đỉnh phân biệt $u,v \in V$ đều tồn tại đường đi từ u đến v và đường đi từ v đến u . Giả sử $C=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ là một chu trình trong D , nếu tồn tại cung $(c_i, c_j) \in A$ với $|i-j| > 1$ thì ta nói rằng chu trình C có *dây cung*. Ngoài ra, các khái niệm khác về đồ thị có hướng được trình bày đầy đủ trong [1].

Đồ thị có hướng $D=(V,A)$ gọi là *đồ thị giải đấu* nếu với mọi cặp đỉnh phân biệt $u,v \in V$ đều tồn tại đúng một cung (u,v) hoặc cung (v,u) thuộc A . Chúng ta ký hiệu đồ thị giải đấu là $T=(V,A)$.

Cho đồ thị giải đấu $T=(V,A)$ và $e_1, e_2, \dots, e_k$ là các cung rời nhau thuộc A . Đồ thị có hướng $T^*=(V^*, A^*)$ gọi là *đồ thị giải đấu khuyết cung* nếu $V^*=V$ và $A^*=A \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$.

Từ nhiều thập kỷ nay, việc tìm kiếm các điều kiện để tồn tại các chu trình rời nhau trên đồ thị có hướng luôn thu hút sự chú ý của giới hàn lâm. Vào năm 1983, Thomassen [2] đã chỉ ra rằng bất kỳ đồ thị có hướng nào thỏa mãn điều kiện bậc ra nhỏ nhất từ 3 trở lên đều sẽ chứa tối thiểu hai chu trình rời nhau. Dù vậy, kết quả này chưa khẳng định được liệu các chu trình này có độ dài khác nhau hay không. Mãi đến năm 2012, Henning và Yeo [3] mới đề xuất giả thuyết rằng mọi đồ thị có hướng với bậc ra nhỏ nhất ít nhất bằng 4 đều chứa hai chu trình rời nhau có độ dài khác nhau. Giả thuyết này đã được chứng minh vào năm 2014 bởi Lichiardopol [4]. Như vậy, với đồ thị có hướng với bậc ra nhỏ nhất bằng 3 thì tồn tại các chu trình rời nhau nhưng độ dài các chu trình này có thể bằng nhau hoặc khác nhau. Trong Hình 1 chúng ta xây dựng đồ thị D_8^3 là đồ thị có tập đỉnh $V(D_8^3) = \{v_0, v_1, \dots, v_5, t, w\}$ và tập cạnh

$$A(D_8^3) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

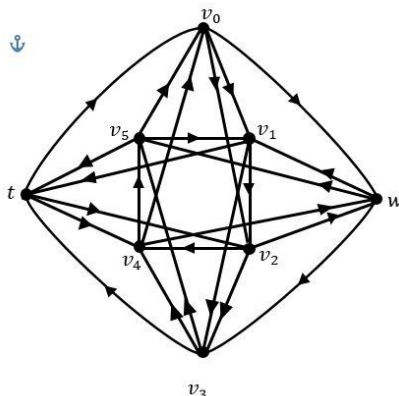
trong đó:

$$A_1 = \{(v_i, v_j) | j - i = 1 \pmod{6}\}, \quad A_2 = \{(v_i, v_j) | j - i = 2 \pmod{6}\},$$

$$A_3 = \{(t, v_i), (v_i, w) | i = 0, 2, 4\} \text{ và } A_4 = \{(w, v_i), (v_i, t) | i = 1, 3, 5\}.$$

Đồ thị D_8^3 là một ví dụ minh họa cho đồ thị có hướng với bậc nhỏ nhất bằng 3 nhưng không tồn tại các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau. Trong thời gian gần đây, hướng nghiên cứu về sự tồn tại chu trình rời nhau với độ dài phân biệt đang được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu

và thu được nhiều kết quả sâu sắc. Gần đây nhất, có thể kể đến các công bố nổi bật trên đồ thị giải đấu, đồ thị giải đấu hai phần [5], đồ thị giải đấu k -phần [6], đồ thị giải đấu bộ phận [7], đồ thị giải đấu tách cực [8]-[10],... và một số lớp đồ thị khác [11], [12].



Hình 1. Đồ thị D_8^3

Bài báo này tiếp tục nghiên cứu sự tồn tại của các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau cho lớp đồ thị giải đấu khuyết cung. Chúng ta chú ý rằng, đồ thị D_8^3 trong Hình 1 là đồ thị giải đấu khuyết cung (đây là đồ thị giải đấu khuyết cung có tập đỉnh là $\{v_0, v_1, \dots, v_5, t, w\}$ và khuyết các cung $(v_0, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_5), (t, w)$), liên thông mạnh, bậc ra nhỏ nhất bằng 3 và không có các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau. Vấn đề đặt ra trong bài báo này là, chúng ta sẽ nghiên cứu và đưa ra được một số tính chất chung của đồ thị giải đấu khuyết cung, liên thông mạnh, bậc ra nhỏ nhất bằng 3 và không có các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau.

2. Phương pháp nghiên cứu

Cho đồ thị giải đấu $T = (V, A)$ và $e_1, e_2, \dots, e_k$ ($1 \leq k \leq \frac{n}{2}$) là các cung rời nhau thuộc A . Giả sử $T^* = (V, A^*)$ là đồ thị giải đấu khuyết cung được hình thành từ đồ thị $T = (V, A)$ bằng cách bỏ đi các cung $e_1, e_2, \dots, e_k$. Trong bài báo này, từ đây trở về sau chúng ta luôn giả thiết rằng đồ thị $T^* = (V, A^*)$ là đồ thị liên thông mạnh, bậc ra nhỏ nhất bằng 3 và không có các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau. Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử rằng $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $e_i = (v_{2i-1}, v_{2i})$ hoặc $e_i = (v_{2i}, v_{2i-1})$ với mọi $i=1, 2, \dots, k$. Đặt

$V_1 = (v_1, v_2)$, $V_2 = (v_3, v_4)$, ..., $V_k = (v_{2k-1}, v_{2k})$, $V_{k+1} = \{v_{2k+1}\}$, $V_{k+2} = \{v_{2k+2}\}$, ..., $V_{n-k} = \{v_n\}$.
(chú ý rằng, trong trường hợp $n = 2k$ thì $V_{k+1} = V_{k+2} = \dots = V_{n-k} = \emptyset$).

Vì $T^* = (V, A^*)$ có bậc ra nhỏ nhất bằng 3 nên theo [2], đồ thị T^* có hai chu trình rời nhau C^0 và C^1 . Mặt khác, theo giả thiết của chúng ta trong bài báo này là T^* không có các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau nên chắc chắn C^0 và C^1 có cùng độ dài, ta gọi độ dài đó là $t \geq 3$.
Đặt

$$C^0 = (c_0^0, c_1^0, \dots, c_{t-1}^0),$$

$$C^1 = (c_0^1, c_1^1, \dots, c_{t-1}^1),$$

$$V' = V \setminus (V(C^0) \cup V(C^1)).$$

2.1. Một số kết quả cơ bản liên quan đến kết quả chính

Bằng phương pháp tương tự trong chứng minh các kết quả trong các tài liệu tham khảo (chi tiết nhất là trong [6] và [8]), chúng ta có một số khẳng định dưới đây.

Khẳng định 1. Giả sử $V' = V \setminus (V(C^0) \cup V(C^1)) \neq \emptyset$ và $P = (u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ là một đường đi trong $T^*[V']$. Khi đó, nếu u_ℓ có láng giềng ra trong $V(P)$ thì $\ell \geq t$ và $u_{\ell-t+1}$ là láng giềng ra duy nhất của u_ℓ trong $V(P)$. Tương tự, nếu u_1 có láng giềng vào thì $\ell \geq 3$ và u_t là láng giềng vào duy nhất của u_1 trong $V(P)$.

Khẳng định 2. Giả sử $P = (u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ là một đường đi trong $T^*[V']$. Khi đó

(i) Nếu u_1 có một láng giềng vào trong $V(C^j)$ thì u_ℓ có nhiều nhất một láng giềng ra trong $V(C^j)$ với $j \in \{0, 1\}$;

(ii) Nếu u_1 có hai láng giềng vào trong $V(C^j)$ thì u_ℓ không có láng giềng ra nào trong $V(C^j)$ với $j \in \{0, 1\}$;

(iii) Nếu u_ℓ có một láng giềng ra trong $V(C^j)$ thì u_1 có nhiều nhất một láng giềng vào trong $V(C^j)$ với $j \in \{0, 1\}$;

(iv) Nếu u_ℓ có hai láng giềng ra trong $V(C^j)$ thì u_1 không có láng giềng vào nào trong $V(C^j)$ với $j \in \{0, 1\}$;

Khẳng định 3. Giả sử $u \in V'$. Khi đó

(i) Nếu $(c_i^j, u) \in A^*$ thì $(u, c_{i+1}^j) \notin A^*$,

(ii) Nếu $(u, c_i^j) \in A^*$ thì $(c_{i-1}^j, u) \notin A^*$.

Trong đó, $j \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, t-1$, $i-1$ và $i+1$ được xác định theo modulo t .

Khẳng định 4. Giả sử $u \in V'$ và u kề với tất cả các đỉnh của $V(C^j)$, $j \in \{0, 1\}$. Khi đó

(i) Nếu u có một láng giềng ra thuộc $V(C^j)$ thì $(u, v) \in A^*$ với mọi $v \in V(C^j)$,

(ii) Nếu u có một láng giềng vào thuộc $V(C^j)$ thì $(v, u) \in A^*$ với mọi $v \in V(C^j)$.

Khẳng định 5. Các chu trình C^0 và C^1 đều không có dây cung.

Khẳng định 6. $|V_p| \leq 2$ với mọi $p \in \{1, 2, \dots, n-k\}$.

2.2. Một số bổ đề liên quan đến kết quả chính

Trong mục này, chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh một số bổ đề phục vụ cho việc chứng minh kết quả chính.

Bổ đề 1. Độ dài t của các chu trình C^0 và C^1 bằng 3 hoặc 4.

Chứng minh. Chúng ta chứng minh bổ đề này bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $t \geq 5$. Nếu c_0^0 và c_2^0 kề nhau thì $(c_0^0, c_2^0) \in A$ hoặc $(c_2^0, c_0^0) \in A$. Do đó (c_0^0, c_2^0) (hoặc (c_2^0, c_0^0)) là một dây cung của C^0 , điều này mâu thuẫn với Khẳng định 5 là C^0 không có dây cung. Vì vậy c_0^0 và c_2^0 không kề nhau. Từ đó suy ra tồn tại $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ sao cho $c_0^0, c_2^0 \in V_p$. Theo Khẳng

định 6 thì $|V_p| \leq 2$ nên $c_3^0 \notin V_p$. Do đó c_3^0 và c_0^0 kề nhau. Bằng lập luận tương tự như trên, chúng ta suy ra (c_0^0, c_3^0) (hoặc (c_3^0, c_0^0)) là một dây cung của C^0 , từ đó dẫn đến tiếp tục mâu thuẫn với Khẳng định 5. Vậy, $3 \leq t \leq 4$.

Bổ đề 2. Giả sử $V' \neq \emptyset$ và $u \in V'$ sao cho u có nhiều nhất 2 láng giềng ra thuộc $V(C^0) \cup V(C^1)$ và u có ít nhất 2 láng giềng vào thuộc $V(C^j)$, $j \in \{0, 1\}$. Đặt

$$X_u = \{v \in V' \mid \text{Tồn tại đường đi từ } u \text{ đến } v \text{ trong } T^*[V']\}, Y_u = V' \setminus X_u.$$

Khi đó

1. Tồn tại $u_p, u_q \in X_u$ với $p \neq q$ sao cho $u_p \in V_p, u_q \in V_q$,
2. Mỗi đỉnh thuộc X_u không có láng giềng ra thuộc $V(C^j)$,
3. Mỗi đỉnh thuộc V' không có láng giềng vào thuộc $V(C^{j+1})$.

Chứng minh. 1. Hiển nhiên $u \in X_u$. Vì $d^+(u) \geq 3$ và theo giả thiết u có nhiều nhất 2 láng giềng ra thuộc $V(C^0) \cup V(C^1)$ nên tồn tại $v \in V'$ sao cho $(u, v) \in A^*$. Suy ra $v \in X_u$. Đặt $u_p = u, u_q = v$. Vậy ta đã chứng minh xong tồn tại $u_p, u_q \in X_u$ với $p \neq q$ sao cho $u_p \in V_p, u_q \in V_q$.

2. Giả sử $v \in X_u$. Gọi P là đường nằm trong $T^*[V']$ đi từ u đến v . Theo Khẳng định 2 thì v không có láng giềng ra thuộc $V(C^j)$.

3. Giả sử tồn tại $v \in V'$ sao cho v có láng giềng vào thuộc $V(C^{j+1})$. Ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $v \in X_u$.

Khi đó tồn tại đường P nằm trong $T^*[V']$ đi từ u đến v . Gọi $Q = (u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ là đường có độ dài lớn nhất nằm trong $T^*[V']$ với $u_1 = v$. Theo Khẳng định 1 thì u_ℓ có ít nhất 2 láng giềng ra thuộc $V(C^0) \cup V(C^1)$, nhưng ta vừa chứng minh được u_ℓ không có láng giềng ra thuộc $V(C^j)$ (vì $u_\ell \in X_u$), suy ra u_ℓ có 2 láng giềng ra thuộc $V(C^{j+1})$. Từ đó suy ra mâu thuẫn với Khẳng định 2.

Trường hợp 2. $v \in Y_u$:

Theo Kết luận 1 vừa được chứng minh của bổ đề này thì tồn tại $w \in X_u$ sao cho $(v, w) \in A^*$. Gọi $P = (u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ là đường trong $T^*[V']$ có độ dài lớn nhất với $u_1 = w$. Theo Khẳng định 1 thì u_ℓ có ít nhất 2 láng giềng ra thuộc $V(C^0) \cup V(C^1)$, theo Khẳng định 2 thì u_ℓ không có láng giềng ra thuộc $V(C^j)$. Suy ra u_ℓ có 2 láng giềng ra thuộc $V(C^{j+1})$, điều này mâu thuẫn với Khẳng định 2.

Bổ đề 3. Nếu $t = 4$ thì u kề với tất cả các đỉnh thuộc $V(C^0) \cup V(C^1)$.

Chứng minh. Theo Khẳng định 5 và Khẳng định 6 thì các chu trình C^0, C^1 không có dây cung và $|V_p| \leq 2$ với mọi $p \in \{1, 2, \dots, n-k\}$, do đó tồn tại $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \{1, 2, \dots, n-k\}$ sao cho $\{c_0^0, c_2^0\} = V_{p_1}$, $\{c_1^0, c_3^0\} = V_{p_2}$, $\{c_0^1, c_2^1\} = V_{p_3}$, $\{c_1^1, c_3^1\} = V_{p_4}$. Vì $u \notin V_{p_1} \cup V_{p_2} \cup V_{p_3} \cup V_{p_4}$ nên u kề với tất cả các đỉnh thuộc $V(C^0) \cup V(C^1)$.

3. Kết quả chính

Trong mục này chúng tôi sẽ trình bày một số kết quả nghiên cứu chính của bài báo. Các kết quả này thể hiện mối quan hệ giữa một đỉnh thuộc V' với những đỉnh thuộc $V(C^0) \cup V(C^1)$.

Định lý 1. Giả sử tồn tại $p \in \{1, 2, \dots, n-k\}$ sao cho $V' \cap V_p = \{u\}$, $(V(C^0) \cup V(C^1)) \cap V_p = \emptyset$. Khi đó $(u, c_i^0) \in A^*$ và $(c_i^1, u) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t-1$, hoặc là $(c_i^0, u) \in A^*$ và $(u, c_i^1) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t-1$.

Chứng minh. Vì $u \in V_p$ và $(V(C^0) \cup V(C^1)) \cap V_p = \emptyset$ nên u kề với tất cả các đỉnh thuộc $V(C^0) \cup V(C^1)$.

Trước hết ta giả sử u có láng giềng ra thuộc $V(C^0)$. Theo Khẳng định 4, $(u, c_i^0) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t-1$. Vì u cũng kề với tất cả các đỉnh thuộc $V(C^1)$ nên $(u, c_i^1) \in A^*$ hoặc $(c_i^1, u) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t-1$. Ta giả sử phản chứng rằng $(u, c_i^1) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t-1$. Vì đồ thị T^* liên thông mạnh nên tồn tại đường $P = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ sao cho $u_1 \in V(C^0) \cup V(C^1)$, $u_2, \dots, u_{k-1} \in V'$ và $u_k = u$. Từ đây ta suy ra mâu thuẫn với Khẳng định 2. Vậy, $(c_i^1, u) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t-1$.

Bây giờ ta giả sử rằng u có láng giềng vào thuộc $V(C^0)$. Theo Khẳng định 4, $(c_i^0, u) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t-1$. Vì u cũng kề với tất cả các đỉnh thuộc $V(C^1)$ nên $(u, c_i^1) \in A^*$ hoặc $(c_i^1, u) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t-1$. Ta giả sử phản chứng rằng $(c_i^1, u) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t-1$. Vì $d^+(u) \geq 3$ nên tồn tại $v \in V'$ sao cho $(u, v) \in A^*$. Gọi $P = (u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ là đường trong có độ dài lớn nhất trong $T^*[V']$ với $u_1 = v$. Khi đó u_ℓ có hai láng giềng ra thuộc $V(C^0) \cup V(C^1)$, điều này mâu thuẫn với Khẳng định 2. Vậy, $(u, c_i^1) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t-1$.

Từ Định lý 1 và Bổ đề 3 chúng ta dễ dàng suy ra hệ quả dưới đây.

Hệ quả 1. Nếu $t = 4$ thì $(u, c_i^0) \in A^*$ và $(c_i^1, u) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t-1$, hoặc là $(c_i^0, u) \in A^*$ và $(u, c_i^1) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t-1$.

Định lý 2. Giả sử tồn tại $p \in \{1, 2, \dots, n-k\}$ sao cho $V' \cap V_p = \{u\}$, $(V(C^0) \cup V(C^1)) \cap V_p \neq \emptyset$. Khi đó

1. tồn tại duy nhất $j \in \{0, 1\}$ sao cho $V(C^j) \cap V_p \neq \emptyset$, $t = 3$ và $(u, c_i^1) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, 2$,
2. Nếu $V(C^j) \cap V_p = \{c_r^j\}$ thì $(c_{r+1}^j, u), (c_{r+2}^j, u) \in A^*$, trong đó $r \in \{0, 1, 2\}$ và $r+1, r+2$ được xác định theo modulo 3.

Chứng minh. 1. Vì $|V_p| \leq 2$, $V' \cap V_p = \{u\}$ và $(V(C^0) \cup V(C^1)) \cap V_p \neq \emptyset$ nên tồn tại duy nhất $v \in (V(C^0) \cup V(C^1)) \cap V_p$. Do đó chỉ xảy ra đúng một trong hai trường hợp $v \in V(C^0) \cap V_p$ hoặc $v \in V(C^1) \cap V_p$. Như vậy, tồn tại duy nhất $j \in \{0, 1\}$ sao cho $V(C^j) \cap V_p \neq \emptyset$ và $V_p = \{u, v\}$.

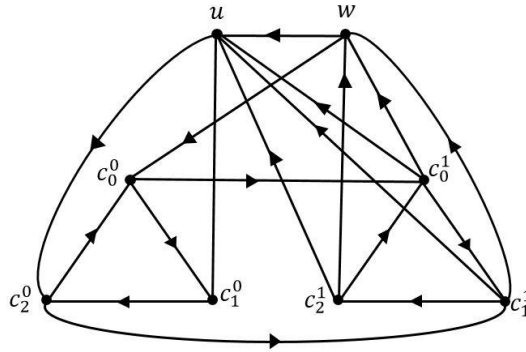
Giả sử $t = 4$. Theo Bổ đề 3 thì u kề với tất cả các đỉnh thuộc $V(C^0) \cup V(C^1)$, tức là u kề với v , điều này là vô lý vì $V_p = \{u, v\}$. Vậy $t = 3$.

Bằng cách đổi tên các chu trình C^0 và C^1 , chúng ta có thể giả sử rằng $v \in V(C^0)$. Bằng cách đổi tên các đỉnh thuộc $V(C^0)$, ta giả sử $v = c_0^0$. Do đó, u kề với c_1^0, c_2^0 và tất cả các đỉnh thuộc $V(C^1)$. Vì u kề với tất cả các đỉnh thuộc $V(C^1)$ nên theo Khẳng định 4, ta có $(u, c_i^1) \in A^*$ hoặc $(c_i^1, u) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, 2$. Giả sử phản chứng rằng $(c_i^1, u) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, 2$. Vì $v = c_0^0 \in V_p$ nên $c_1^0, c_2^0 \notin V_p$. Do đó u kề với cả hai đỉnh c_1^0 và c_2^0 . Suy ra u có nhiều nhất hai láng giềng ra thuộc $V(C^0) \cup V(C^1)$. Do vậy, tồn tại $w \in V'$ sao cho $(u, w) \in A^*$. Dễ thấy w và c_0^0 kề nhau. Theo Bổ đề 2 ta có $(u, c_1^0), (u, c_2^0), (w, c_0^0) \in A^*$. Cũng theo Bổ đề 2, mỗi đỉnh thuộc $V(C^0)$ không có láng

giềng ra thuộc V' nên mỗi đỉnh thuộc $V(C^0)$ có ít nhất 2 láng giềng ra thuộc $V(C^1)$. Tiếp theo, ta xét các trường hợp dưới đây.

Trường hợp 1. w kề với tất cả các đỉnh thuộc $V(C^1)$.

Theo Khẳng định 2 thì $(c_i^1, w) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, 2$. Vì mỗi đỉnh thuộc $V(C^0)$ có ít nhất 2 láng giềng ra thuộc $V(C^1)$, không mất tính tổng quát ta giả sử $(c_0^0, c_0^1) \in A^*$. Vì c_2^0 có 2 láng giềng ra thuộc $V(C^1)$, nên tồn tại $z \neq c_0^1$ sao cho $(c_2^0, z) \in A^*$. Ta có: (c_0^0, c_0^1, w, c_0^0) và (u, c_1^0, c_2^0, z, u) là 2 chu trình rời nhau có độ dài khác nhau (xem Hình 2). Điều này là mâu thuẫn với giả thiết.



Hình 2. Mô tả mâu thuẫn trong Trường hợp 1 của Kết luận 1

Trường hợp 2. w không kề với một đỉnh nào đó thuộc $V(C^1)$.

Bằng cách đổi tên các đỉnh thuộc $V(C^1)$, ta giả sử w không kề với c_0^1 . Do đó w phải kề với c_1^1 và c_2^1 . Theo Khẳng định 2 ta có $(c_1^1, w), (c_2^1, w) \in A^*$. Vì c_0^0 có ít nhất hai láng giềng ra $\in V(C^1)$ nên tồn tại $z \in \{c_1^1, c_2^1\}$ sao cho $(c_0^0, z) \in A^*$. Vì c_2^0 có ít nhất 2 láng giềng ra thuộc $V(C^1)$, nên tồn tại $x \neq z$ sao cho $(c_2^0, x) \in A^*$. Khi đó, (w, c_0^0, z, w) và (u, c_1^0, c_2^0, x, u) là 2 chu trình rời nhau có độ dài khác nhau, điều này tiếp tục mâu thuẫn với giả thiết.

Như vậy, ta đã chứng minh xong $(u, c_i^1) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, 2$.

2. Bằng cách đổi tên các chu trình C^0 và C^1 ta giả sử $j = 0$. Bằng cách đổi tên các đỉnh thuộc $V(C^0)$ ta giả sử $r = 0$. Khi đó $V_p = \{u, c_0^0\}$, u kề với cả c_1^0 và c_2^0 .

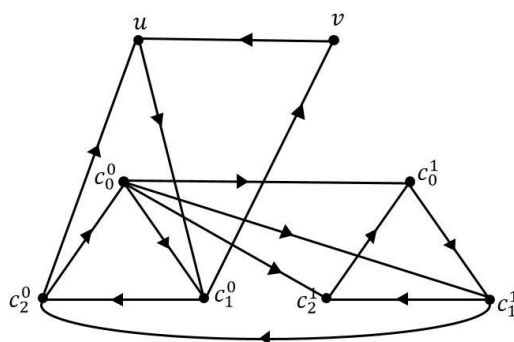
Trước hết ta chứng minh $(c_1^0, u) \in A^*$ hoặc $(c_2^0, u) \in A^*$. Giả sử phản chứng rằng $(u, c_1^0) \in A^*$ và $(u, c_2^0) \in A^*$. Vì T^* liên thông mạnh nên tồn tại đường $P = (u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ sao cho $u_1 \in V(C^0) \cup V(C^1)$ và $u_\ell = u, u_2, \dots, u_{\ell-1} \in V'$. Điều này dẫn đến mâu thuẫn với Khẳng định 2. Vậy $(c_1^0, u) \in A^*$ hoặc $(c_2^0, u) \in A^*$.

Tiếp theo, ta chứng minh $(c_2^0, u) \in A^*$. Giả sử $(u, c_2^0) \in A^*$. Theo chứng minh ở đoạn trên thì ta có $(c_1^0, u) \in A^*$, điều này mâu thuẫn với Khẳng định 3.

Cuối cùng ta chứng minh $(c_1^1, u) \in A^*$. Giả sử $(u, c_1^1) \in A^*$. Khi đó ta có $(c_2^0, u) \in A^*$. Xét hai chu trình $(C^0)' = (u, c_1^0, c_2^0, u)$ và C^1 . Áp dụng Kết luận 1 của định lý này cho đỉnh c_0^0 và các chu trình $(C^0)'$, C^1 ta thu được kết quả thì $(c_0^0, c_i^1) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, 2$. Tiếp theo ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. Tất cả các đỉnh của $V(C^1)$ không có láng giềng ra thuộc V' .

Khi đó mỗi đỉnh của $V(C^1)$ có 2 láng giềng ra thuộc $V(C^0)$, từ đó suy ra $(c_i^1, c_1^0), (c_i^1, c_2^0) \in A^*$ với mọi $i = 0, 1, 2$. Do đó c_1^0 có đúng một láng giềng ra thuộc $V(C^0) \cup V(C^1)$, suy ra tồn tại $v \in V'$ sao cho $(c_1^0, v) \in A^*$. Vì $v \in V_p$ nên v và u kề nhau. Nếu $(v, u) \in A^*$ thì (v, u, c_1^0, v) và $(c_0^0, c_0^1, c_1^1, c_2^0, c_0^0)$ là 2 chu trình rời nhau có độ dài khác nhau, điều này mâu thuẫn với giả thiết (xem Hình 3). Do đó $(u, v) \in A^*$. Gọi $P = (u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ là đường trong có độ dài lớn nhất trong $T^*[V']$ với $u_1 = v$. Khi đó u_ℓ có ít nhất hai láng giềng ra thuộc $V(C^0) \cup V(C^1)$. Nhưng theo Khẳng định 2 thì hai láng giềng ra này không thể cùng thuộc $V(C^0)$, suy ra u_ℓ có một láng giềng ra thuộc $V(C^1)$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $(u_\ell, c_0^1) \in A^*$. Khi đó $(c_0^0, c_2^1, c_2^0, c_0^0)$ và $(c_1^0, u_1, \dots, u_\ell, c_0^1, c_1^1, c_1^0)$ là 2 chu trình rời nhau có độ dài khác nhau, điều này mâu thuẫn với giả thiết.



Hình 3. Mô tả mâu thuẫn trong Trường hợp 1 của Kết luận 2

Trường hợp 2. Tồn tại một đỉnh của $V(C^1)$ có láng giềng ra thuộc V' .

Bằng cách đổi tên các đỉnh của $V(C^1)$, chúng ta giả sử rằng c_0^1 có láng giềng ra $w \in V'$. Vì $V_p = (u, c_0^0)$ nên u và w kề nhau (vì $w \notin V_p$). Nếu $(w, u) \in A^*$ thì mâu thuẫn với Khẳng định 2. Do đó $(u, w) \in A^*$. Gọi $P = (u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ là đường trong có độ dài lớn nhất trong $T^*[V']$ với $u_1 = w$. Khi đó u_ℓ có ít nhất hai láng giềng ra thuộc $V(C^0) \cup V(C^1)$. Theo Khẳng định 2 thì hai láng giềng ra này không thể cùng thuộc $V(C^1)$, suy ra u_ℓ có ít nhất một láng giềng thuộc $V(C^0)$. Nếu $l \geq 2$ thì C^1 và $(u, w, \dots, u_\ell, c_0^0, c_1^0, c_2^0, u)$ (hoặc $(u, w, \dots, u_\ell, c_1^0, c_2^0, u)$, hoặc $(u, w, \dots, u_\ell, c_2^0, u)$) là 2 chu trình rời nhau có độ dài khác nhau, điều này mâu thuẫn với giả thiết. Do đó $l = 1$. Khi đó u_ℓ (lúc này $u_\ell = u_1 = w$) có hai láng giềng ra thuộc $V(C^0)$, điều này mâu thuẫn với Khẳng định 2.

Như vậy ta đã chứng minh xong Kết luận 2 của định lý này.

4. Kết luận

Khảo sát sự tồn tại của các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau trên đồ thị có hướng là một chủ đề hấp dẫn, mang tính thời sự và có nhiều triển vọng trong lý thuyết đồ thị hiện đại. Các công trình trước đây đã khẳng định chặt chẽ rằng: bất kỳ đồ thị có hướng nào với bậc ra nhỏ nhất từ 4 trở lên đều chắc chắn chứa các chu trình rời nhau có độ dài khác nhau. Do đó, tâm điểm chuyển sang các bài toán giới hạn hơn, cụ thể là việc giải quyết lớp đồ thị có hướng có bậc ra nhỏ nhất bằng 3. Trên thực tế, nhiều thành tựu đáng kể đã được công bố xoay quanh chủ đề này với các lớp đồ thị có hướng khác nhau. Kế thừa định hướng đó, bài báo đi sâu phân tích nhóm đồ thị giải đầu khuyết cung. Bước đầu, chúng tôi đã thiết lập và chứng minh thành công một loạt điều kiện cần cho lớp đồ thị này trong trường hợp đồ thị có bậc ra nhỏ nhất bằng 3 nhưng không chứa chu trình

rời nhau nào có độ dài khác nhau. Về mặt bố cục, Mục 2.1 của bài báo chỉ ra các tính chất chung của đồ thị không có các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau (từ Khẳng định 1 đến Khẳng định 5). Mục 2.2 tập trung xây dựng và chứng minh các hệ quả trung gian liên quan trực tiếp đến đồ thị khuyết cung (từ Bổ đề 1 đến Bổ đề 3). Các bổ đề này đóng vai trò làm nền tảng lý thuyết cốt lõi để đưa đến kết quả quan trọng nhất tại Mục 3, được phát biểu chặt chẽ thể hiện qua Định lý 1 và Định lý 2. Trong các định lý này, chúng tôi đã phát biểu và chứng minh được mối quan hệ giữa các đỉnh trong đồ thị khuyết cung liên thông mạnh, bậc ra nhỏ nhất bằng 3 và không tồn tại các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau. Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu bài toán này, hy vọng sẽ xác định trọn vẹn đặc trưng cấu trúc của các đồ thị giải đấu khuyết cung có bậc ra nhỏ nhất bằng 3 mà không tồn tại các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau.

Lời cảm ơn

Các tác giả bài báo xin chân thành cảm ơn Tạp chí Khoa học và Công nghệ Đại học Thái Nguyên và các phản biện đã có những đóng góp quý báu giúp cho bài báo được hoàn thiện một cách khoa học và đầy đủ hơn. Nghiên cứu này được tài trợ bởi Đại học Công nghiệp Hà Nội thông qua nhiệm vụ khoa học và công nghệ theo hợp đồng số 48-2025-RD/HD-ĐHCN. Chúng tôi cũng chân thành cảm ơn Đại học Công nghiệp Hà Nội đã tạo điều kiện thuận lợi nhất để chúng tôi hoàn thành bài báo này, góp phần hoàn thành đề tài nghiên cứu cấp trường “Sự tồn tại các chu trình rời nhau với độ dài khác nhau trong đồ thị giải đấu tách cực”.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] J. Bang-Jensen and G. Gutin, *Digraphs. Theory, Algorithms and Applications*, Springer, New York, 2001.
- [2] C. Thomassen, “Disjoint cycles in digraphs,” *Combinatorica*, vol. 3, pp. 393-396, 1983.
- [3] M. A. Henning and A. Yeo, “Vertex disjoint cycles of different length in digraphs,” *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 26, pp. 687-694, 2012.
- [4] N. Lichiardopol, “Proof of a conjecture of Henning and Yeo on vertex-disjoint directed cycles,” *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 28, pp. 1618-1627, 2014.
- [5] D. T. Ngo, “Tournaments and bipartite tournaments without vertex disjoint cycles of different lengths,” *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 35, no. 1, pp. 485-494, 2021.
- [6] X. H. Le, D. H. Do, and D. T. Ngo, “Vertex-disjoint cycles of different lengths in multipartite tournaments,” *Discrete Math.*, vol. 345, 2022, Art. no. 112819.
- [7] X. H. Le and D. T. Ngo, “Vertex-Disjoint Cycles of Different Lengths in Local Tournaments,” *Graphs and Combinatorics*, vol. 39, no. 5, 2023, Art. no. 92.
- [8] N. H. Le, T. H. Mai, T. T. M. Vu, T. Q. Chu, and X. H. Le, “Some necessary conditions for split tournaments having no disjoint cycles of different lengths,” *TNU Journal of Science and Technology*, vol. 230, no. 07, pp. 3-11, 2025, doi: 10.34238/tnu-jst.11722.
- [9] N. H. Le, T. H. Mai, T. T. M. Vu, T. Q. Chu, and X. H. Le, “Some properties of split tournaments with minimum out-degree 3 having no disjoint cycles of different lengths,” *Journal of Science and Technology – The University of Danang*, vol. 23, no. 07, pp. 82-86, 2025, doi: 10.31130/ud-jst.2025.23(7).129.
- [10] N. H. Le, T. H. Mai, T. T. M. Vu, T. Q. Chu, H. C. Tran, and X. H. Le, “Necessary and sufficient conditions for a split tournament graphs to have no disjoint cycle of different lengths,” *18th National Scientific Conference (FAIR'2025)*, 2025, pp. 491-494, doi: 10.15625/vap.2025.0331.
- [11] X. H. Le, “Vertex-disjoint cycles of different lengths in tournaments of cycles,” *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 22, no. 1, pp. 46-53, 2025.
- [12] X. H. Le, “Incomplete tournaments without disjoint cycles of different lengths,” *Australas. J. Combin.* 93, no. 2, pp. 398-407, 2025.