

# PHÂN TÍCH ĐỘ NHẠY CỦA CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN ĐẾN ĐỘ VÔNG KẾT CẤU DÀN

## SENSITIVITY ANALYSIS OF UNCERTAINTIES TO THE DEFORMATION BEHAVIOR OF TRUSS

ĐOÀN NHƯ SƠN\*, PHẠM THỊ LY, NGUYỄN PHAN ANH

Khoa Công trình, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

\*Email liên hệ: vanson.ctt@vamaru.edu.vn

### Tóm tắt

Bài báo này nghiên cứu sự ảnh hưởng của các biến thiết kế tới ứng xử của kết cấu dàn. Độ võng kết cấu dàn, ứng xử thường được dùng để đánh giá trạng thái giới hạn sử dụng của kết cấu, được mô tả như ứng xử điển hình trong nghiên cứu này. Dựa trên kỹ thuật sai phân hữu hạn, một tập hợp gồm các biến ngẫu nhiên được thành lập, sau đó ứng xử võng của kết cấu được đánh giá cho từng mẫu thử. Hệ số độ nhạy (sensitivity factor) của từng biến được xác định theo tỷ số giữa chênh lệch ứng xử do từng biến gây ra với biến thiên của biến đó. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng mô đun đàn hồi và diện tích mặt cắt các thanh biên là những tham số giúp giảm độ võng của kết cấu, trái lại các lực đặt tại các nút giữa dàn có ảnh hưởng lớn tới độ võng dàn. Đặc biệt là, sự thay đổi trong mô đun đàn hồi và diện tích các thanh giằng không gây ảnh hưởng đáng kể tới độ võng dàn. Điều đó có nghĩa là các yếu tố bất định trong thanh giằng có thể bỏ qua trong phân tích độ tin cậy kết cấu nhằm giảm kích thước cho bài toán. Đánh giá này được xác nhận bằng cách so sánh kết quả độ tin cậy có được từ hai mô phỏng Monte Carlo trong đó có hoặc không xét tới các yếu tố bất định trong thanh giằng.

**Từ khóa:** Phân tích độ nhạy, kết cấu dàn, mô phỏng Monte Carlo.

### Abstract

This study examines the influences of the design parameters on the behavior of the truss structure. The deformation representing the service limit state of the structures is taken as a representative behavior. Based on the finite difference technique, the uncertain variables set is first generated, then the behaviors are evaluated for each sampling. The sensitivity factors of each variable are assessed by the ratio between variations of the behaviors and those of the variable. The

investigation reveals that the elastic modulus and section areas of the chord members significantly contribute to the safe side of the structure, meanwhile the load applied to the middle nodes of the truss show the most critical factors causing deformations. Particularly, it is also observed that variations in the properties of the brace members do not cause considerable effects on the deformation behavior of the truss. That means the uncertainties in the brace bars can be neglected in reliability analysis for reducing the dimension of the problem. This statement is confirmed by comparing the reliability indexes obtained from two Monte Carlo simulations that compare two schemes with or without consideration of uncertainties in brace members.

**Keywords:** Sensitivity analysis, truss structure, Monte Carlo simulation.

### 1. Mở đầu

Trong các bài toán thiết kế, việc xác định được mức độ ảnh hưởng của các tham số tới ứng xử của kết cấu là cần thiết. Căn cứ vào mức độ ảnh hưởng của từng tham số, người thiết kế có thể đưa ra những điều chỉnh hợp lý dựa trên các tham số có ảnh hưởng lớn tới ứng xử của kết cấu. Ngoài ra, trong quá trình khai thác, kiểm định hay sửa chữa, những tham số có ảnh hưởng lớn tới an toàn kết cấu cũng cần được theo dõi kỹ hơn so với những tham số có sự ảnh hưởng nhỏ.

Kết quả của bài toán phân tích độ nhạy là lượng hóa được sự ảnh hưởng của từng tham số đầu vào tới các ứng xử của kết cấu. Sự ảnh hưởng có thể được chuẩn hóa, xếp thứ tự theo mức độ tác động, từ đó các tham số có mức độ ảnh hưởng nhiều nhất tới an toàn của kết cấu (cả ảnh hưởng tiêu cực và tích cực) được xác định. Bên cạnh đó, các tham số không ảnh hưởng đáng kể tới ứng xử của kết cấu cũng được xác định. Dựa trên những kết quả này, các tham số ít ảnh hưởng tới ứng xử kết cấu có thể được xem xét như là những yếu tố xác định.

Rõ ràng là độ nhạy của các tham số sẽ phụ thuộc vào mức độ bất định (uncertainty) của tham số đó. Do đó, phân tích độ nhạy thường được kết hợp với bài toán phân tích độ tin cậy. Ví dụ như các hệ số “cosine” có được từ phương pháp độ tin cậy bậc 1 (first-order reliability method hay FORM) cũng phản ánh mức độ ảnh hưởng của tham số tới độ tin cậy đang xét. Thêm vào đó, độ nhạy của tham số tới ứng xử kết cấu cũng được kể đến trong quá trình xây dựng các tiêu chuẩn thiết kế ví dụ như hệ thống tiêu chuẩn thiết kế theo trạng thái giới hạn [1,2]. Theo đó, tham số có độ nhạy (sensitivity factor) lớn thường được thiết kế với hệ số lớn hơn.

Các phương pháp phân tích độ nhạy đã được nghiên cứu trong các nghiên cứu trước [3,4]. Kết quả phân tích độ nhạy thông qua FORM cũng được áp dụng trong một số nghiên cứu [5,6]. Theo các nghiên cứu này, phân tích độ nhạy thường được gắn với bài toán phân tích độ tin cậy. Các nghiên cứu trước cũng chỉ rõ, phân tích độ nhạy sẽ trở nên dễ dàng hơn rất nhiều nếu bài toán được xây dựng thành các hàm tường minh (explicit functions), khi đó các độ nhạy của các tham số có thể được tính theo các phép tính vi phân thông thường. Tuy nhiên, các bài toán kỹ thuật hầu hết được xây dựng thông qua các hàm ẩn (implicit functions). Ví như nội lực hay độ võng của kết cấu thường được xác định thông qua phương pháp phần tử hữu hạn (finite element method - FEM). Do đó, việc áp dụng trực tiếp các phép tính vi phân là không khả thi. Năm 1999, Hassan và Wolf [7] đã đề xuất một mô hình tính toán độ tin cậy cho ổn định mái dốc, trong đó các cosine được tính toán dựa theo kỹ thuật sai phân hữu hạn. Kỹ thuật này sau đó được vận dụng để phân tích độ nhạy của các tham số ảnh hưởng tới sự ổn định của nền móng đê chắn sóng [8]. Kết quả phân tích độ nhạy sau đó được vận dụng để giảm số lượng biến trong bài toán xác định hệ số tải trọng và hệ số sức kháng.

Trong bài báo này, kỹ thuật sai phân hữu hạn được vận dụng để phân tích độ nhạy của các biến mang yếu tố bất định trong bài toán dầm. Theo đó, các biến có ảnh hưởng gây kém an toàn cũng như tăng cường sự an toàn được xác định. Bên cạnh đó, các biến có ảnh hưởng nhỏ tới sự an toàn kết cấu cũng được xác định. Căn cứ vào kết quả phân tích độ nhạy, các biến có ảnh hưởng nhỏ tới ứng xử của kết cấu được loại bỏ trong bài toán phân tích độ tin cậy để giảm chiều (kích thước) cho mô hình. Kết quả phân tích độ tin cậy này được so sánh với kết quả tính toán cho bài toán ban đầu. Để thực hiện tính toán, một chương trình MATLAB được lập phục vụ cho việc tính toán kết cấu

dầm dựa theo phương pháp phần tử hữu hạn, theo đó độ võng lớn nhất được xác định. Một chương trình MATLAB khác cũng được lập phục vụ cho việc phân tích độ tin cậy dựa trên mô phỏng Monte Carlo.

## 2. Phương pháp

Trong mục này, một phương pháp phân tích độ nhạy dựa trên kỹ thuật sai phân hữu hạn sẽ được trình bày. Độ võng lớn nhất của kết cấu đại diện cho trạng thái sử dụng của kết cấu được tính toán thông qua phương pháp phần tử hữu hạn.

### 2.1. Tính toán độ võng dầm

Phương pháp phần tử hữu hạn được áp dụng phổ biến trong các bài toán kỹ thuật cũng như tính toán kết cấu công trình [9]. Phương pháp phần tử hữu hạn áp dụng cho tính toán kết cấu công trình dạng dầm cũng đã được nghiên cứu [10]. Các bước tính toán kết cấu dầm theo phương pháp phần tử hữu hạn được trình bày như dưới đây. Chú ý rằng ẩn số trong bài toán dầm phẳng là chuyển vị tại các nút dầm và mỗi nút dầm có 2 chuyển vị tịnh tiến.

(1) Thành lập bài toán, trong đó các thông tin như tọa độ nút, phần tử, đặc trưng mặt cắt, vật liệu, lực tác dụng và điều kiện biên được khai báo.

(2) Xây dựng ma trận độ cứng cho từng phần tử.

(3) Thành lập ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ lực nút tương ứng. Xây dựng được phương trình quan hệ giữa lực và biến dạng cho cả hệ dầm.

(4) Áp điều kiện biên để có phương trình rút gọn.

(5) Giải phương trình rút gọn để xác định các chuyển vị ẩn tại nút dầm.

(6) Tính toán lực dọc trong từng thanh dầm.

Một chương trình MATLAB (*FEM-Truss*) được lập để tính toán kết cấu dầm các theo các bước trên. Kết quả của chương trình là chuyển vị của các nút dầm, từ đó chuyển vị lớn nhất được xác định. Chuyển vị lớn nhất đặc trưng cho giới hạn sử dụng của dầm sẽ được xem xét trong bài báo này.

### 2.2. Phương pháp phân tích độ nhạy

Như đã trình bày ở mục 2.1, chuyển vị lớn nhất của dầm được xác định thông qua phương pháp phần tử hữu hạn. Nói khác đi, độ võng của kết cấu được xác định thông qua chu trình ẩn. Do đó, không thể áp dụng trực tiếp các phép tính vi phân. Kỹ thuật sai phân hữu hạn được mô tả dưới đây dùng cho phân tích độ nhạy.

Xét cụ thể độ võng là ứng xử đầu ra cần xem xét. Các tham số đầu vào như đã trình bày trong mục 2.1 bao gồm kích thước, sơ đồ kết cấu dầm, vật liệu thanh dầm, mô đun đàn hồi của vật liệu, điều kiện biên của

hệ kết cấu, và các tải trọng tác dụng. Gọi véc tơ  $x$  bao gồm các tham số đầu vào,  $x = \{X_i\}$ . Chương trình MATLAB dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn giúp tính toán độ võng lớn nhất của hệ kết cấu,  $y$ . Tức là:

$$\{X_i\} \xrightarrow{FEM-Truss} y(x) = y(\{X_i\}) \quad (1)$$

Ý tưởng của kỹ thuật sai phân hữu hạn nhằm xét sự thay đổi của hàm ứng xử  $y$  tương ứng với sự thay đổi của 1 biến nào đó. Ví dụ, xét 1 biến  $X_i$  trong tập hợp biến  $x$  là thay đổi, các biến khác được giữ nguyên. Sau đó, hàm ứng xử sẽ được tính cho tập giá trị đầu vào chứa tham số thay đổi. Vi phân số,  $SF$  của hàm ứng xử là tỷ lệ của thay đổi hàm ứng xử với thay đổi của biến và được tính theo công thức (2).

$$SF_i = \frac{\Delta y}{\Delta X_i} = \frac{y^+ - y^-}{X_i^+ - X_i^-} \quad (2)$$

Tỷ lệ thay đổi của biến,  $k$  đã được nghiên cứu và được khuyến nghị là lấy lớn hơn hoặc bằng 1 [7, 8]. Nghiên cứu này lấy giá trị của  $k$  là 1. Xét biến  $X$  có kỳ vọng là  $\mu_X$  và độ lệch chuẩn là  $\sigma_X$ , các giá trị thay đổi sẽ được tính theo công thức (3).

$$X_i^\pm = \mu_{X_i} \pm k\sigma_{X_i} \quad (3)$$

Khi đó, vi phân số trong phương trình (2) được viết lại theo phương trình (4).

$$SF_i = \frac{y^+ - y^-}{\left(\mu_{X_i} + k\sigma_{X_i}\right) - \left(\mu_{X_i} - k\sigma_{X_i}\right)}$$

$$SF_i = \frac{y^+ - y^-}{2k\sigma_{X_i}} \quad (4)$$

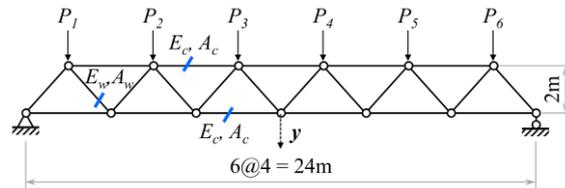
Trong các phương trình trên,  $y^+$  ký hiệu cho độ võng của kết cấu tương ứng với biên trên ( $X^+$ ) của biến  $X$ , ngược lại  $y^-$  tương ứng với ứng xử tính toán tại biên dưới ( $X^-$ ) của biến  $X$  đang xét.

### 3. Ví dụ tính toán

Trong mục này, một kết cấu dàn thể hiện trên Hình 1 được nghiên cứu. Độ tin cậy của bài toán dàn này đã được nghiên cứu trong nghiên cứu khác [11, 12]. Phân tích độ nhạy sẽ được nghiên cứu trong nghiên cứu này. Ngoài ra, kết quả phân tích độ tin cậy có được từ các nghiên cứu trước được dùng để xác nhận độ chính xác của chương trình tính trong bài báo này.

Kết cấu dàn gồm 23 thanh dàn được liên kết với nhau tại 13 nút dàn. Chuyển vị theo hai phương bị ràng buộc tại gối cố định bên trái, chuyển vị theo phương đứng bị ràng buộc tại gối di động bên phải.

Các tham số được tổng hợp trong Bảng 1. Trong Bảng 1 và Hình 1, mô đun đàn hồi của thép và diện tích tiết diện thanh dàn lần lượt được ký hiệu là  $E$  và  $A$ . Các chỉ số  $c$  và  $w$  là ký hiệu cho thanh biên và thanh giằng dàn. Tải trọng tác dụng ( $P$ ) đặt tại các nút dàn ở biên trên của dàn. Các biến trong Bảng 1 là các biến có yếu tố bất định, các tham số còn lại được coi là xác định trong nghiên cứu này.



Hình 1. Sơ đồ kết cấu dàn

Bảng 1. Các tham số bất định được xét

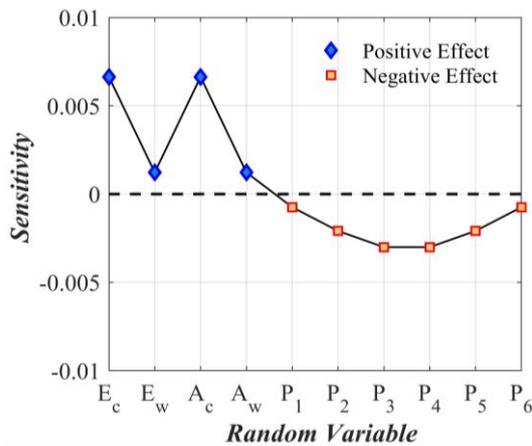
Tham số	Kỳ vọng, $\mu$	Độ lệch chuẩn, $\sigma$	Kiểu phân phối
$E_c$ (kN/m <sup>2</sup> )	$2,1 \times 10^8$	$2,1 \times 10^7$	Log-normal
$E_w$ (kN/m <sup>2</sup> )	$2,1 \times 10^8$	$2,1 \times 10^7$	Log-normal
$A_c$ (m <sup>2</sup> )	$2,0 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-4}$	Log-normal
$A_w$ (m <sup>2</sup> )	$1,0 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-4}$	Log-normal
$P_1$ (kN)	50	7,5	Gumbel
$P_2$ (kN)	50	7,5	Gumbel
$P_3$ (kN)	50	7,5	Gumbel
$P_4$ (kN)	50	7,5	Gumbel
$P_5$ (kN)	50	7,5	Gumbel

### 4. Kết quả và thảo luận

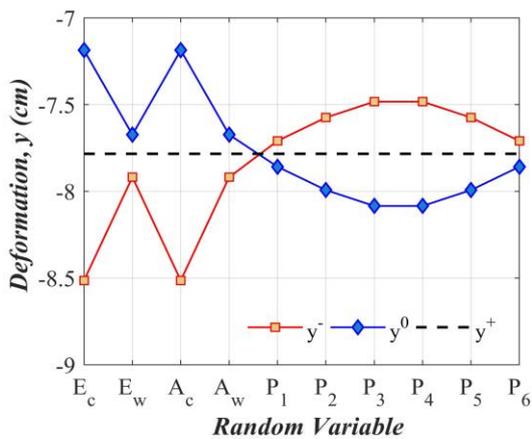
Sử dụng các giá trị kỳ vọng của biến đầu vào, độ võng lớn nhất của dàn (tại nút giữa biên dưới) tính được là 7,78cm. Kết quả này giống với giá trị báo cáo trong các nghiên cứu trước. Từ kết quả này có thể khẳng định tính chính xác của chương trình tính.

Kết quả phân tích độ nhạy được tổng hợp trên Hình 2 cho 10 biến ngẫu nhiên được xét. Các điểm hình thoi màu xanh trên Hình 2 thể hiện các biến giúp giảm độ võng (tăng độ an toàn), các điểm hình vuông màu đỏ chỉ ra các biến làm tăng độ võng (giảm an toàn).

Kết quả trên Hình 2 cho thấy rằng các thanh biên trên và biên dưới đóng vai trò rất quan trọng để giảm độ võng của dàn, trong khi các thanh giằng ảnh hưởng không đáng kể tới ứng xử võng của dàn mặc dù mức độ bất định trong các thanh dàn là như nhau. Mặt khác, các tải trọng đặt tại giữa nhịp ( $P_3$  và  $P_4$ ) là những yếu tố gây võng nhiều nhất. Trong khi đó, các tải trọng đặt tại hai đầu dàn ( $P_1$  và  $P_6$ ) gây ảnh hưởng nhỏ tới ứng xử của dàn mặc dù yếu tố bất định cho các tải trọng là như nhau.



**Hình 2. Độ nhạy của độ võng với từng biến**



**Hình 3. Độ võng của dầm theo từng biến**

Độ võng của kết cấu dầm ứng với sự thay đổi của từng biến được thống kê trên Hình 3. Đường màu đỏ trên Hình 3 thể hiện các ứng xử võng lớn nhất của kết cấu dầm khi các tham số được xét ở biên dưới của chúng. Ngược lại, đường màu xanh thể hiện độ võng tính được khi các biến được đặt ở biên trên. Đường nét đứt màu đen tổng hợp độ võng khi các biến được đặt ở giá trị kỳ vọng của chúng. Hình 3 cho thấy độ võng thay đổi đáng kể khi các tham số (mô đun đàn hồi, diện tích mặt cắt) các thanh biên dầm được tính tại các giá trị biên. Trái lại, các sự thay đổi trong các thanh giằng chỉ gây ra thay đổi nhỏ cho độ võng dầm. Dễ thấy các nhận xét này cũng tương tự cho các tải trọng đặt tại giữa nhịp và tại hai đầu dầm.

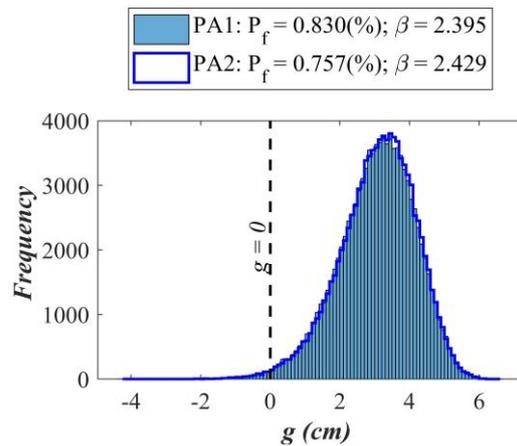
Dựa trên kết quả phân tích độ nhạy ở trên, các yếu tố bất định trong các thanh giằng được xem xét theo hai phương án. Trong phương án 1 (PA1), các yếu tố bất định trong các thanh giằng được giữ nguyên như yêu cầu ban đầu của bài toán. Ngược lại, các yếu tố bất định trong các thanh giằng được bỏ qua trong phương án 2 (PA2). Sau đó, các giá trị độ tin cậy của

kết cấu xét theo độ võng giới hạn được tính cho hai phương án trên. Độ võng giới hạn được lấy là 11cm theo nghiên cứu trước [12]. Theo đó phương trình trạng thái giới hạn ( $g$ ) được viết theo phương trình (5).

$$g = y - 11cm \quad (5)$$

Phương pháp mô phỏng Monte Carlo (MCS) được dùng để đánh giá xác suất hư hỏng ( $P_f$ ) cho 2 phương án nêu trên. Nội dung phương pháp MCS đã được trình bày, áp dụng trong các nghiên cứu trước [6,13] và không được nhắc đến ở đây.

Kết quả mô phỏng Monte Carlo được thể hiện trong Hình 4. Kết quả xác suất hư hỏng ( $P_f$ ) thu được từ mô phỏng theo phương án 1 (0,830%) gần như tương đồng với kết quả công bố của nghiên cứu trước (0,833%) [12]. Sự tương đồng này một lần nữa xác nhận sự chính xác của chương trình tính đã lập.



**Hình 4. Kết quả phân tích độ tin cậy theo MCS**

Từ Hình 4, dễ dàng nhận thấy rằng kết quả sai khác không đáng kể (dưới 1,5% theo độ tin cậy  $\beta$ ) khi bỏ qua các yếu tố bất định trong các thanh giằng (PA2). Việc loại bỏ các yếu tố bất định có ảnh hưởng nhỏ tới ứng xử kết cấu xác định được từ phân tích độ nhạy giúp giảm khối lượng tính toán cho các bài toán phân tích độ tin cậy sau này.

### 5. Kết luận

Dựa trên kỹ thuật sai phân hữu hạn, phương pháp phân tích độ nhạy có thể được áp dụng rộng rãi cho các bài toán kỹ thuật mà các hàm ứng xử của nó được xác định qua các chu trình ẩn. Một ví dụ về phân tích độ nhạy cho kết cấu dầm đã được nghiên cứu. Theo đó, mức độ ảnh hưởng của các yếu tố bất định tới độ võng dầm được xem xét. Một vài kết luận được rút ra như dưới đây.

Với cùng một mức độ bất định được xem xét, các yếu tố bất định trong thanh biên dầm có sự ảnh hưởng lớn tới độ cứng của dầm (làm giảm độ võng dầm). Ngược lại, các yếu tố bất định trong thanh giằng ảnh hưởng không đáng kể tới độ võng dầm.

Khi xem xét cùng mức độ bất định, các tải trọng tại giữa nhịp dầm ảnh hưởng nhiều nhất tới sự thay đổi độ võng dầm (gây võng), trong khi đó các lực tại hai đầu dầm ảnh hưởng nhỏ tới biến thiên độ võng dầm.

Hai mô phỏng Monte Carlo được thực hiện và so sánh cho thấy rằng các yếu tố bất định có ảnh hưởng nhỏ tới ứng xử kết cấu (yếu tố bất định trong thanh giằng) có thể được bỏ qua giúp giảm nhẹ kích thước của bài toán phân tích độ tin cậy, qua đó giảm khối lượng tính toán cho bài toán.

### Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Hàng hải Việt Nam trong đề tài mã số: **DT22-23.73**.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] AASHTO. *LRFD Bridge Design Specifications*. 8th ed. AASHTO: Washington, DC, USA: 2017.
- [2] TCVN-2737-2020. *Loads and Actions - Design standard*.
- [3] Castillo E, Conejo AJ, Aranda E (2008). *Sensitivity analysis in calculus of variations. Some applications*. SIAM Rev, Vol.50, Issue.2, pp.294-312.  
<https://doi.org/10.1137/050641600>.
- [4] Ditlevsen O, Madsen HO (2007). *Structural Reliability Methods*. Denmark: Department of mechanical engineering technical university of Denmark.
- [5] Gayton N, Mohamed A, Sorensen JD, Pendola M, Lemaire M (2004). *Calibration methods for reliability-based design codes*. Structural Safety, Vol.26, Issue01, pp.91-121.  
[https://doi.org/10.1016/S0167-4730\(03\)00024-9](https://doi.org/10.1016/S0167-4730(03)00024-9).
- [6] Doan NS, Huh J, Mac VH, Kim D, Kwak K (2020). *Probabilistic risk evaluation for overall stability of composite caisson breakwaters in Korea*. J Mar Sci Eng Vol.8, pp.1-19.  
<https://doi.org/10.3390/jmse8030148>.
- [7] Hassan AM, Wolff TF (1999). *Search Algorithm for Minimum Reliability Index of Earth Slopes*. J Geotech Geoenvironmental Eng, Vol. 125, Issue 4.
- [8] Doan NS, Huh J, Mac VH, Kim DH, Kwak K (2021). *Calibration of Load and Resistance Factors for Breakwater Foundations under the Earthquake Loading*. Sustainability, Vol.13, Issue 4.  
<https://doi.org/10.3390/su13041730>.
- [9] Cook RD, Malkus DS, Plesha ME, Witt RJ (2002). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4th ed. New York: Wiley.
- [10] Trần Ngọc An, Lê Đức Mạnh, Phan Xuân Tần (2021). *Tính toán kết cấu dầm chính của công trục dạng dầm theo mô hình phẳng bằng phương pháp phần tử hữu hạn*. Tạp chí Giao thông vận tải, Số tháng 8/2021, Hà Nội
- [11] Dubourg V (2011). *Adaptive surrogate models for reliability analysis and reliability-based design optimization*. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II.
- [12] Lee SH, Kwak BM (2006). *Response surface augmented moment method for efficient reliability analysis*. Struct Saf, Vol.28, Issue 3, pp.261-272.  
<https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2005.08.003>.
- [13] Doan NS, Dang P Van, Huh J, Mac VH, Haldar A (2022). *Efficient approach for calibration of load and resistance factors in the limit state design of a breakwater foundation*. Ocean Eng, Vol.251.  
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111170>.

Ngày nhận bài:	14/10/2022
Ngày nhận bản sửa:	07/11/2022
Ngày duyệt đăng:	12/11/2022