

ỨNG DỤNG CHUỖI TAYLOR TRONG TÍNH TOÁN ĐỘ TIN CẬY KẾT CẤU DÀN

APPLICATION OF TAYLOR'S EXPANSION TO ASSESS RELIABILITY INDEX OF TRUSS STRUCTURES

TRẦN ANH TUẤN

Khoa Công trình, Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải

*Email liên hệ: tuanta@utt.edu.vn

Tóm tắt

Các bài toán phân tích độ tin cậy kết cấu thường yêu cầu những kiến thức liên quan đến tính toán xác suất. Việc vận dụng những kiến thức xác suất gây khó khăn các kỹ sư thiết kế trong quá trình tính toán. Mặt khác, phương pháp mô phỏng Monte Carlo yêu cầu việc tính toán lặp đi lặp lại nhiều lần để bài toán được hội tụ. May mắn là, việc xấp xỉ các hàm trạng thái sử dụng chuỗi Taylor trong phương pháp bậc (MVFOSM) có thể giúp bài toán xác định độ tin cậy tránh được hai nhược điểm kể trên. Cụ thể là, MVFOSM đơn giản, dễ áp dụng cho các kỹ sư không có nhiều kiến thức về lý thuyết xác suất, và khối lượng tính toán hàm ứng xử chỉ rất nhỏ so với mô phỏng Monte Carlo đầy đủ. Nghiên cứu này áp dụng phương pháp bậc nhất của phương sai và kỳ vọng (MVFOSM) trong bài toán phân tích độ tin cậy. Phương pháp này được áp dụng cho hai kết cấu dàn phẳng. Kết quả tính toán cho thấy phương pháp MVFOSM cho kết quả tương đối chính xác. Sai số lớn nhất không quá 5% cho bài toán dàn phức tạp gồm 10 biến ngẫu nhiên. Đặc biệt là, phương pháp này yêu cầu rất ít khối lượng tính toán so với mô phỏng Monte Carlo.

Từ khóa: Chuỗi Taylor, MVFOSM, mô phỏng Monte Carlo, phân tích độ tin cậy, kết cấu dàn.

Abstract

In reliability analysis, calculations frequently require insight into probabilistic knowledge. Requirements of probabilistic methods cause difficulty for engineers in design practice. Alternatively, Monte Carlo simulation requires repeating calculations to achieve accurate solutions. Fortunately, a method of Mean Value First-Order Second-Moment (MVFOSM) that uses Taylor's series can overcome the two abovementioned drawbacks. Namely, MVFOSM does not require significant knowledge about

probabilistic analysis or expensive computing time and effort. This study investigates the application of the method of MVFOSM to reliability analysis. The method is applied to two planar truss structures. The results disclose that the MVFOSM method can derive good approximation solutions. The largest error is lower than 5% for the more complex truss, including ten random variables. Particularly, the methods require a minor computing effort compared to the Monte Carlo simulation.

Keywords: Taylor's expansion, MVFOSM, MCS, reliability analysis, truss structure.

1. Mở đầu

Trong các bài toán thiết kế, việc so sánh lựa chọn các phương án đảm bảo kỹ thuật, thẩm mỹ, và kinh tế là cần thiết. Ở góc độ kỹ thuật, sự an toàn của kết cấu thường được xét thông qua các hệ số an toàn có được thông qua các tính toán tất định. Tuy nhiên các tính toán tất định thường không đảm bảo đưa ra một hệ thống giải pháp kết cấu thống nhất về mặt an toàn. Để khắc phục vấn đề này, gần đây, các tính toán thiết kế thông qua các phương pháp xác suất được khuyến nghị [1, 2] và được áp dụng trong quá trình xây dựng các tiêu chuẩn thiết kế [3, 4]. Các tiêu chuẩn này được phân loại là các tiêu chuẩn thiết kế theo độ tin cậy.

Tuy nhiên, việc tính toán thiết kế dựa theo độ tin cậy thường yêu cầu các kiến thức phức tạp liên quan đến lý thuyết xác suất. Ví dụ như phương pháp độ tin cậy bậc một (FORM: First Order Reliability Method), phương pháp độ tin cậy bậc hai (SORM: Second Order Reliability Method) [1]. Ngoài ra, các phương pháp này cũng yêu cầu những phép tính vi phân. Tiếc là các hàm trạng thái trong thực tế hiếm khi được định nghĩa thông qua các phương trình tường minh và thường được xác định thông qua các chu trình ẩn gây khó khăn cho các tính toán vi phân. Ví dụ như, nội lực, ứng suất trong các bộ phận kết cấu thường được giải thông qua chu trình ẩn dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn. Do đó việc áp dụng FORM hoặc SORM

thường trở nên phức tạp đối với những kỹ sư thiết kế.

Bên cạnh đó, các mô phỏng Monte Carlo (MCS: Monte Carlo simulation) thường yêu cầu khối lượng tính toán rất lớn, thường tới hàng trăm ngàn lần hoặc hàng triệu lần. Có nghĩa là các phân tích phải thực hiện lặp đi lặp lại rất nhiều lần để bài toán được hội tụ. Trong thực tế, đôi khi việc áp dụng trực tiếp MCS là không khả thi cho các bài toán có phi tuyến bậc cao, hay bài toán có kích thước lớn vì thời gian tính toán cho một lần phân tích thường rất lâu.

Một phương pháp gần đúng dựa trên việc xấp xỉ bậc nhất của phương sai và kỳ vọng (MVFOSM: Mean Value First Order Second moment) được khuyến nghị như là một cách tiếp cận gần đúng trong các bài toán xác định độ tin cậy [1, 5]. Ý tưởng của phương pháp này là dùng chuỗi Taylor để xấp xỉ các hàm trạng thái bằng cách bỏ đi các phần tử bậc cao trong chuỗi. Phương pháp này được áp dụng thành công cho các bài toán địa kỹ thuật [5, 6]. Ưu điểm của phương pháp này là số lượng tính toán rất ít, thường khoảng vài chục lần. Con số này là phù hợp để đưa ra một kết quả gần đúng so với số lượng rất lớn các phân tích cần thiết trong MCS.

MVFOSM là phương pháp kém chính xác nhất khi so với các phương pháp FORM, SORM hay MCS vì phải dùng tới các xấp xỉ bậc nhất như trình bày ở Mục 2. Tuy nhiên, MVFOSM được áp dụng trong các bước nghiên cứu tiền khả thi hoặc khả thi để so sánh các phương án. Ngoài ra, phương pháp này cũng cho kết quả tương đối chính xác với các bài toán tuyến tính hoặc các biến bất định có hệ số biến thiên nhỏ (COV: Coefficient of Variation nhỏ) [1, 2, 5].

Phương pháp MVFOSM được áp dụng trong nghiên cứu này để tính toán độ tin cậy kết cấu dàn, trong đó xấp xỉ bậc nhất của chuỗi Taylor được sử dụng. Lưu ý là các ứng xử của kết cấu dàn thường được xác định thông qua các phần mềm thương mại thân thiện với các kỹ sư thiết kế như SAP 2000, MIDAS CIVIL,... Vì được xác định thông qua các chu trình ẩn như kể trên nên việc tính toán các vi phân trong các phương pháp FORM, SORM trở nên khó khăn. Và việc áp dụng mô phỏng Monte Carlo yêu cầu thời gian và khối lượng tính toán lớn. Do đó, việc áp dụng MVFOSM được đề xuất. Hai kết cấu dàn phẳng được nghiên cứu trong nghiên cứu này. Một kết cấu dàn Pratt gồm hai biến bất định để mô tả chu trình tính. Một bài toán dàn phức tạp hơn gồm mười biến bất định được xét. Các kết quả có được từ MVFOSM được so sánh với kết quả chính xác có được từ việc thực hiện các mô phỏng Monte Carlo cho cả hai ví dụ.

2. Phương pháp

Trong mục này, phương pháp MVFOSM dựa trên xấp xỉ bậc nhất của chuỗi Taylor được trình bày [7]. Các ứng xử của kết cấu dàn được xác định thông qua phương pháp phần tử hữu hạn. Các ứng xử của kết cấu xác định được sẽ là tham số đầu vào cho phương pháp MVFOSM để tính toán độ tin cậy.

2.1. Hàm ứng xử của kết cấu dàn

Phương pháp phần tử hữu hạn được sử dụng rộng rãi trong các bài toán tính toán ứng xử kết cấu. Dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn, chương trình *FEM-Truss* đã được phát triển trên phần mềm MATLAB để xác định các ứng xử của kết cấu dàn trong các nghiên cứu trước [8]. Chương trình *FEM-Truss* được sử dụng trong nghiên cứu này để tính toán nội lực trong các thanh dàn. Các bước tính toán theo *FEM-Truss* đã được trình bày trong các nghiên cứu trước và không được trình bày ở đây. Ứng xử kéo và nén trong thanh dàn được tính toán trong nghiên cứu này.

2.2. Áp dụng chuỗi Taylor cho phân tích độ tin cậy

Như đã trình bày ở trên, phương pháp MVFOSM có ưu điểm là không sử dụng các lý thuyết xác suất phức tạp như FORM hay SORM. Ngoài ra MVFOSM cũng không yêu cầu khối lượng tính toán lớn như các mô phỏng MCS. Các bước tính toán theo MVFOSM được tóm tắt như dưới đây [5,7].

Xét hàm trạng thái g là hàm được xác định thông qua các biến đầu vào X như phương trình (1a). Theo đó, độ tin cậy β được định nghĩa là tỷ số giữa kỳ vọng của g (μ_g) và độ lệch chuẩn của nó (σ_g) như công thức (1b) [1].

$$g = g(X); \left(X = \{X_i\}; i = 1 \div n \right) \quad (1a)$$

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad (1b)$$

Như vậy, bài toán xác định độ tin cậy yêu cầu phải xác định được giá trị kỳ vọng cũng như độ lệch chuẩn của g .

Trong phương pháp MVFOSM, hàm g có thể được xấp xỉ bằng cách bỏ qua các phần tử bậc cao của chuỗi Taylor như phương trình (2) [1].

$$g \approx g(\mu_X) + \sum_1^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{\mu_X} (X_i - \mu_{X_i}) \quad (2)$$

Sử dụng phương trình (2) và giả định rằng các biến là độc lập với nhau, giá trị của kỳ vọng μ_g và độ lệch

chuẩn σ_g lần lượt được xấp xỉ như trong phương trình (3) và phương trình (4).

$$\mu_g = g(\mu_X) \quad (3)$$

$$\sigma_g = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right)^2} \quad (4)$$

Trong phương trình (3) và (4), $\partial g/\partial X_i$ là đạo hàm của hàm trạng thái g theo từng biến X_i . Việc tính toán các đạo hàm này là khó khăn với các chu trình ẩn, công thức (4) khi đó được xấp xỉ thông qua phương pháp sai phân hữu hạn như phương trình (5).

$$\sigma_g \approx \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\Delta g_i}{\Delta X_i} \sigma_{X_i} \right)^2} \quad (5)$$

Trong đó, các số gia của biến X_i được xác định thông qua phương trình (6). Trong phương trình (6), k là tham số tùy ý, thường được chọn bằng 1.

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= X_i^+ - X_i^- = \\ &= (\mu_{X_i} + k\sigma_{X_i}) - (\mu_{X_i} - k\sigma_{X_i}) \quad (6) \\ &= 2k\sigma_{X_i} \end{aligned}$$

Thay phương trình (6) và (5) vào phương trình (4) sẽ được độ lệch chuẩn xấp xỉ như phương trình (7).

$$\sigma_g \approx \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\Delta g_i}{2k} \right)^2} \quad (7)$$

Δg_i trong các phương trình trên là số gia của hàm trạng thái g theo từng biến X_i . Các số gia này được tính như phương trình (8) dưới đây. Trong phương trình (8), g_i^+ và g_i^- lần lượt là các giá trị của hàm trạng thái tính được tại các giá trị biên trên (X_i^+) và biên dưới (X_i^-) của biến X_i . Lưu ý là, khi tính toán các giá trị biên của g trong phương trình (8) chỉ có biến X_i đang xét được thay bằng các giá trị biên, các biến còn lại được giữ nguyên tại giá trị kỳ vọng của nó.

$$\begin{aligned} \Delta g_i &= g_i^+ - g_i^- = \\ &= g(\mu_{X_j}, \mu_{X_i} + k\sigma_{X_i}) - g(\mu_{X_j}, \mu_{X_i} - k\sigma_{X_i}) \\ &\quad (\forall j \neq i) \quad (8) \end{aligned}$$

Phương trình (1) được áp dụng trực tiếp cho các hàm trạng thái tuân theo phân phối Normal. Tuy nhiên,

trong các bài toán kỹ thuật, phân phối của hàm trạng thái thường được giả định là dạng Lognormal [1]. Khi đó, hệ số độ tin cậy sẽ được xác định theo phương trình (9) dưới đây. Trong phương trình (9), COV_g là hệ số biến thiên của hàm trạng thái g . Hệ số này được tính bằng tỷ số giữa σ_g và μ_g .

$$\beta_{LN} = \frac{\ln \left(\frac{\mu_g}{\sqrt{1 + COV_g^2}} \right)}{\sqrt{\ln(1 + COV_g^2)}} \quad (9)$$

Như vậy, độ tin cậy trong phương trình (1) hoặc phương trình (9) được tính xấp xỉ thông qua phương trình (3), phương trình (7) và phương trình (8). Các bước tính toán độ tin cậy theo MVFOSM được tóm tắt như dưới đây.

Bước 1. Tính toán giá trị kỳ vọng của hàm trạng thái g theo phương trình (3).

Bước 2. Chọn giá trị tham số k và tạo các giá trị biên của từng biến X_i thông qua tham số k . Xét bài toán có kích thước n (tức là gồm n biến bất định), khi đó tổng số điểm biên cần tạo ra là $2n$.

Bước 3. Xác định các giá trị của hàm g cho từng tập mẫu tạo được ở Bước 2. Lưu ý rằng, mỗi tập hợp biên đầu vào sẽ chỉ bao gồm 1 biến được đặt ở giá trị biên. Do đó, cần thực hiện $2n$ tính toán để xác định được $2n$ giá trị biên của hàm trạng thái.

Bước 4. Tính toán độ lệch chuẩn của hàm trạng thái sử dụng các giá trị tính toán được ở Bước 3 và phương trình (7), (8).

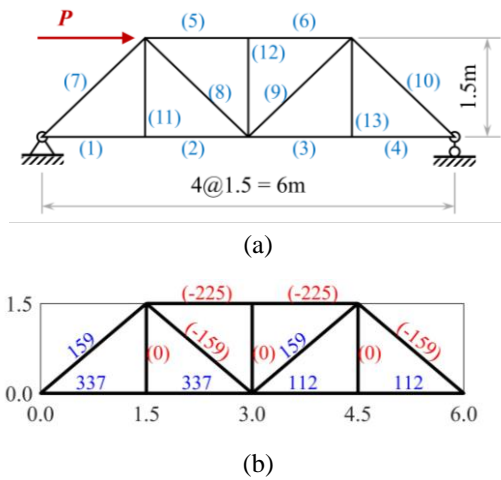
Bước 5. Tính toán độ tin cậy theo công thức (9) cho các phân phối dạng LogNormal sử dụng kết quả của Bước 1 và Bước 4.

3. Ví dụ tính toán

Trong mục này, hai kết cấu dàn được nghiên cứu. Độ tin cậy của kết cấu được xác định tương ứng với ứng xử kéo và nén trong các thanh biên dàn.

Trong Ví dụ 1, một kết cấu dàn Pratt gồm 13 thanh dàn được xem xét. Các thanh dàn có tiết diện tròn diện tích 20 cm^2 , vật liệu thép thanh dàn có giới hạn chảy là 250 MPa , mô đun đàn hồi $2 \times 10^5 \text{ MPa}$. Lực tác dụng P tác dụng theo phương ngang đặt tại biên trên dàn. Để đơn giản, trong ví dụ này hai biến bất định được xem xét bao gồm diện tích thanh thép tuân theo luật phân phối Normal có độ lệch chuẩn là 2 cm^2 và lực P tuân theo phân phối Gumbel có kỳ vọng và độ lệch chuẩn lần lượt là 450 kN , 67.5 kN . Sử dụng chương trình *FEM-Truss*, nội lực trong các thanh dàn xác định được tại các giá trị

kỳ vọng của biến đầu vào như trình bày trên Hình 1.



Hình 1. Ví dụ 1, (a) Sơ đồ dàn Pratt; (b) Nội lực thanh.

Trong Ví dụ 1, có 2 biến ngẫu nhiên là diện tích mặt cắt thanh A , tải trọng P . Theo đó, số lượng điểm tính toán cần thiết cho áp dụng MVFOSM là 5 điểm ($2 \times 2 + 1$). Các điểm mô phỏng này được thống kê như trong Bảng 1. Sử dụng các điểm mô phỏng này, các hệ số an toàn tương ứng được xác định và ghi trong Bảng 1. Trong nghiên cứu này các ứng xử bền kéo và nén được xem xét. Chú ý là các thanh số 1 và 5 lần lượt được xét là các thanh đại diện cho ứng xử kéo và nén.

Bảng 1. Kết quả tính toán hệ số an toàn cho Ví dụ 1

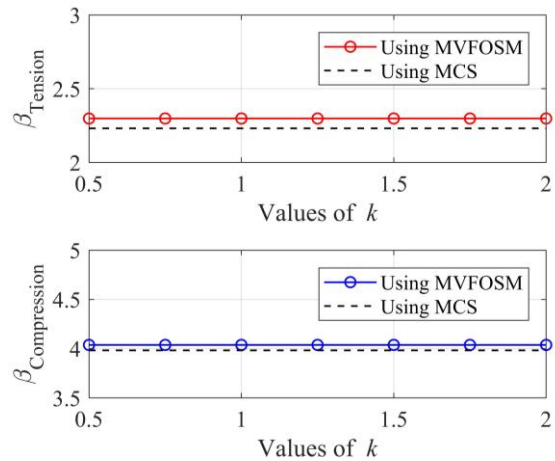
Tham số	Giá trị	Kéo		Nén	
		FS	ΔF	FS	ΔF
A^+	20.4	1.51	0.11	2.27	0.17
A^-	19.6	1.40		2.10	
P^+	517.5	1.26		1.90	
P^-	382.5	1.71	-0.45	2.57	-0.67

Các kỳ vọng của FS: FS kéo = 1.45; FS nén = 2.18

Sử dụng kết quả tính toán được trong Bảng 1 và áp dụng các công thức (7), và (9) giá trị độ tin cậy tính toán được cho các ứng xử kéo và nén lần lượt là 2.298 và 4.038. Các giá trị này được tổng hợp trong Bảng 3.

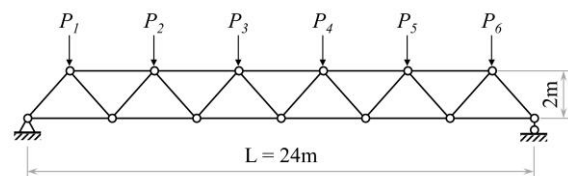
Hình 2 dưới đây khảo sát ảnh hưởng của tham số lấy mẫu k tới các kết quả độ tin cậy cho ứng xử kéo và nén trong Ví dụ 1. Kết quả trên Hình 2 cho thấy tham số k ảnh hưởng không đáng kể tới kết quả tính. Dựa vào kết quả so sánh trên Hình 2, giá trị $k = 1$ được khuyến nghị áp dụng.

Trong Ví dụ 1, chu trình áp dụng phương pháp MVFOSM sử dụng chuỗi Taylor đã được trình bày. Chu trình này được mở rộng cho bài toán nhiều biến hơn, là các bài toán thường gặp trong thực tế.



Hình 2. Ảnh hưởng của tham số k tới kết quả tính toán

Trong Ví dụ 2, một sơ đồ dàn gồm 23 thanh dàn như trong Hình 3 được xem xét. Độ nhạy của ứng xử võng của kết cấu dàn này với các biến ngẫu nhiên đã được phân tích trong nghiên cứu trước [8]. Các biến bất định trong Ví dụ 2 được tham khảo trong các nghiên cứu trước [8–10] và tổng hợp lại trong Bảng 2. 10 biến ngẫu nhiên được xem xét trong Ví dụ 2. Theo đó, 20 điểm mô phỏng được tạo ra như trong Ví dụ 1. Các ứng xử của kết cấu lần lượt được xác định cho 20 điểm mô phỏng và một giá trị tại các kỳ vọng của 10 biến. Các ứng xử kéo và nén của các thanh biên dàn cũng được xét trong ví dụ này. Sử dụng các bước tính toán như trình bày ở trên để tính toán độ tin cậy cho các ứng xử kết cấu, các kết quả được tổng hợp lại trong Bảng 3.



Hình 3. Ví dụ 2, sơ đồ kết cấu dàn

Bảng 2. Các tham số bất định trong Ví dụ 2

Tham số	Kỳ vọng, μ	Độ lệch chuẩn, σ	Kiểu phân phối
E_c (kN/m^2)	$2,1 \times 10^8$	$2,1 \times 10^7$	Log-normal
E_w (kN/m^2)	$2,1 \times 10^8$	$2,1 \times 10^7$	Log-normal
A_c (m^2)	$2,0 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-4}$	Log-normal
A_w (m^2)	$1,0 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-4}$	Log-normal
P_i (kN) ($i = 1-6$)	50	7,5	Gumbel

Kết quả tính toán theo MVFOSM cho hai ví dụ được so sánh với kết quả chính xác có được từ mô phỏng Monte Carlo sử dụng 1 triệu mô phỏng. Kết quả tính theo hai phương pháp được so sánh trong Bảng 3.

Bảng 3. So sánh kết quả với mô phỏng MCS

Ứng xử	MVFOSM	MCS	Sai số (%)
<i>Ví dụ 1 (thực hiện 5 mô phỏng)</i>			
Kéo	2.298	2.231	3.00
Nén	4.038	3.983	1.38
<i>Ví dụ 2 (thực hiện 21 mô phỏng)</i>			
Kéo	3.559	3.440	3.45
Nén	3.575	3.454	3.51

Từ Bảng 3 ta thấy phương pháp MVFOSM sử dụng xấp xỉ chuỗi Taylor cho kết quả tương đối chính xác cho cả hai ví dụ. Trong Ví dụ 2 có mười biến bất định được xem xét, là tương đối lớn so với hai biến trong Ví dụ 1. Ngoài ra các tham số liên quan đến cường độ chịu lực (kéo, nén) của thanh đều được xem xét là những biến bất định trong Ví dụ 2 nên mức độ phi tuyến trong Ví dụ 2 cao hơn so với Ví dụ 1. Kết quả là, sai số trong Ví dụ 2 lớn hơn so với Ví dụ 1. Tuy nhiên, sai số lớn nhất khoảng 3,5% được ghi nhận trong Bảng 3. Kết quả này có thể coi là chấp nhận được trong các bước nghiên cứu, so sánh lựa chọn phương án. Vì trong các bước này, việc áp dụng các mô phỏng Monte Carlo để có được nghiệm chính xác là chưa cần thiết, đặc biệt là với các bài toán phức tạp việc thực hiện hàng chục nghìn tới hàng trăm nghìn mô phỏng yêu cầu rất nhiều thời gian tính toán. Thay vào đó, phương pháp MVFOSM được khuyến nghị áp dụng.

4. Kết luận

Dựa trên xấp xỉ chuỗi Taylor, phương pháp MVFOSM được áp dụng cho các bài toán mà hàm ứng xử của nó xác định thông qua chu trình ẩn, như bài toán kết cấu dầm. Hai mô phỏng số được áp dụng trong nghiên cứu này. Một vài kết luận được rút ra như sau.

Phương pháp MVFOSM dễ áp dụng trong các bài toán kỹ thuật vì không yêu cầu các tính toán phức tạp theo lý thuyết xác suất. Các giá trị biên của hàm trạng thái dễ dàng xác định thông qua các tính toán như thông thường.

Phương pháp MVFOSM yêu cầu số lần tính toán là $2n+1$ cho bài toán gồm n biến bất định. Khoảng lấy mẫu k không ảnh hưởng đáng kể đến kết quả tính toán. Giá trị k được khuyến nghị lấy bằng 1.

Kết quả tính toán bằng MVFOSM dựa trên xấp xỉ chuỗi Taylor là gần với nghiệm chính xác có được từ mô phỏng Monte Carlo với một triệu mẫu. Do đó,

phương pháp này được khuyến nghị cho những bước tính toán không yêu cầu độ chính xác quá cao.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Haldar A, Mahadevan S. Probability (2000), *Reliability and Statistical Methods in Engineering Design*. John Wiley: Hoboken, NY, USA.
- [2] Nowak AS, Collins KR (2012). *Reliability of structures*. 2nd ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press.
- [3] AISC 360-16 (2016). *Specification for Structural Steel Buildings*. Chicago, USA: American Institute of Steel Construction.
- [4] AASHTO (2017). *LRFD Bridge Design Specifications*. 8th ed. AASHTO: Washington, DC, USA.
- [5] Doan NS, Huh J, Mac VH, Kim D, Kwak K (2020). *Probabilistic risk evaluation for overall stability of composite caisson breakwaters in Korea*. J Mar Sci Eng; Vol.8, pp.1-19. <https://doi.org/10.3390/jmse8030148>.
- [6] Hassan AM, Wolff TF (1999). *Search Algorithm for Minimum Reliability Index of Earth Slopes*. J Geotech Geoenvironmental Eng, Vol. 125: 301-8.
- [7] Duncan JM, Member H (2000). *Factors of safety and reliability in geotechnical engineering*. Geotech Geol Eng; Vol.126, pp.911-22. <https://doi.org/10.1007/s10706-014-9768-1>.
- [8] Đoàn Như Sơn, Nguyễn Phan Anh, Phạm Thị Ly (2022). *Phân tích độ nhạy của các biến ngẫu nhiên đến độ võng kết cấu dầm*. Tạp chí Khoa học Công nghệ Hàng hải, Số 72 2022.
- [9] Dubourg V (2012). *Adaptive surrogate models for reliability analysis and reliability-based design optimization*. Other. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2011. English. NNT : 2011CLF22184 . tel-00697026v2.
- [10] Lee SH, Kwak BM. *Response surface augmented moment method for efficient reliability analysis*. Struct Saf 2006; Vol.28:2, pp.61-72. <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2005.08.003>.

Ngày nhận bài:	09/03/2023
Ngày nhận bản sửa:	07/04/2023
Ngày duyệt đăng:	12/04/2023