

# ẢNH HƯỞNG CỦA BIẾN DẠNG CÀN ĐẾN DAO ĐỘNG VẬT NÂNG CỦA CÀN TRỤC ỚNG LÔNG

## EFFECT OF BOOM DEFORMATION ON THE PAYLOAD OSCILLATION OF TELESCOPIC BOOM CRANES

BÙI ĐỨC NHỎ<sup>1</sup>, CHU VĂN ĐẠT<sup>2</sup>, LÊ VĂN DƯƠNG<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Viện Kỹ thuật cơ giới quân sự, Tổng cục Kỹ thuật

<sup>2</sup>Viện Cơ khí động lực, Học viện Kỹ thuật Quân sự

\*Email liên hệ: leduong145@gmail.com

### Tóm tắt

Bài báo nghiên cứu ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi càn đến dao động vật nâng của càn trục ống lồng khi nâng hạ tải. Để xác định được các thông số của quỹ đạo vật nâng, bài báo xây dựng mô hình động lực học (DLH) của càn trục ống lồng khi nâng hạ tải. Phương pháp hệ quy chiếu đồng hành với các xấp xỉ Ritz - Galerkin được sử dụng để xây dựng hệ phương trình vi phân mô tả DLH của càn trục ống lồng khi kể đến biến dạng càn. Trên cơ sở đó, bài báo so sánh các thông số DLH mô tả quỹ đạo vật nâng trong trường hợp càn cứng và biến dạng để xem xét ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi càn. Kết quả nghiên cứu của bài báo có thể làm cơ sở để xây dựng thuật toán điều khiển đối với càn trục ống lồng một cách chính xác hơn.

**Từ khóa:** Càn trục ống lồng, mô hình càn trục, động lực học càn trục, điều khiển càn trục.

### Abstract

The article investigates the influence of boom deformation on the oscillation of the lifting object in a telescopic boom crane during the load lifting and lowering process. To determine the parameters of the payload trajectory, the article constructs a dynamic model of the telescopic boom crane when handling loads. The companion scaling method with Ritz-Galerkin approximations is utilized to build a system of differential equations describing the crane's dynamic model considering the boom deformation. Based on this, the article compares the parameters of the dynamic model describing the lifting object's trajectory in the cases of rigid and deformed booms to examine the impact of boom elasticity. The research results of the article can provide a basis for developing more accurate control algorithms for telescopic boom cranes.

**Keywords:** Telescopic cranes, crane modeling, crane dynamics, control of cranes.

### 1. Mở đầu

Càn trục thủy lực ống lồng là thiết bị nâng - vận chuyển vật có nhiều ưu điểm về kích thước, tải trọng và độ an toàn nên được sử dụng ngày càng phổ biến trong các lĩnh vực khác nhau. Nghiên cứu DLH của càn trục nhằm giải quyết các bài toán tính toán thiết kế, điều khiển,... là một vấn đề phức tạp và đã có nhiều công bố khoa học về vấn đề này [3-5]. Đã có một số công bố nghiên cứu về DLH càn trục thủy lực ống lồng có kể đến biến dạng càn, tuy nhiên các nghiên cứu này chỉ xét đến vật nâng là tải cố định tại đầu càn mà chưa xét đến quỹ đạo chuyển động của vật nâng [6-8].

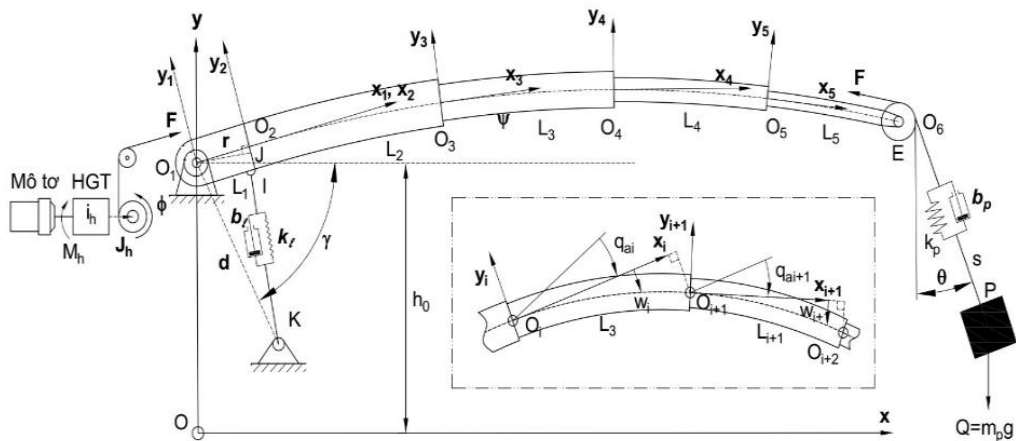
Trong bài báo này, tác giả tiến hành nghiên cứu ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi càn đến các thông số quỹ đạo chuyển động của vật nâng trong quá trình làm việc của càn trục.

### 2. Xây dựng mô hình

**Các giả thiết khi xây dựng mô hình:** Vật nâng được coi là một chất điểm có khối lượng là  $m_p$ ; Bỏ qua tải trọng gió; Dây cáp có độ cứng quy dẫn là  $k_p$ , hệ số dập tắt dao động là  $b_p$ ; Xy lanh thủy lực nâng hạ càn được thay thế tương đương bằng lò xo có độ cứng  $k_l$  và giảm chấn với hệ số dập tắt dao động  $b_l$ ; Phần xe cơ sở, cột chân càn được coi là không biến dạng; Các đốt của càn trục được coi là đồng nhất và có tiết diện không đổi trên toàn bộ chiều dài của mỗi đốt; Ống lồng ngoài cùng được chia làm 2 đoạn khác nhau: Đoạn đầu ống lồng có khớp bản lề là cứng tuyệt đối, đoạn trên là biến dạng; Liên kết giữa các đốt khi xét là dạng ngàm.

**Xây dựng mô hình tính động lực học:** Mô hình DLH càn trục ống lồng có kể đến biến dạng càn được thể hiện trên Hình 1.

Mô hình gồm có 5 khâu: Khâu 1 là phần càn cứng tuyệt đối, khâu 2, 3, 4, 5 là các càn ống lồng biến dạng.



**Hình 1. Mô hình ĐLH cần trục ống lồng có kể đến biến dạng cần**

Các hệ trục tọa độ:  $Oxy$  - Hệ trục tọa độ cố định ( $Oy$  đi qua khớp quay cần);  $O_i x_i y_i$  - Hệ trục tọa độ địa phương gắn vào các khâu ( $i = 1 \div 5$ ).

**Các thông số của mô hình:**  $m_i$  - Khối lượng khâu  $i$ ;  $L_i$  - Chiều dài khâu  $i$ ;  $J_i$  - Mô men quán tính khâu  $i$ ;  $J_h$  - Mô men quán tính của cơ cấu nâng quy dẫn về tang cuốn cáp;  $M_h$  - Mô-men tang cuốn cáp;  $i_h$  - Tỷ số truyền của hộp giảm tốc cơ cấu nâng;  $R_h$  - Bán kính tang cuốn cáp;  $F_l$  - Lực của xy lạnh thủy lực nâng hạ cần;  $a$  - Bội suất palăng cáp nâng vật;  $q_{ai}$  - Góc tạo bởi tiếp tuyến tại điểm cuối khâu ( $i-1$ ) so với trục  $O_i x_i$  ( $i=2 \div 5$ );  $w_i$  - Chuyển vị uốn ngang tương đối của khâu  $i$  trong hệ quy chiếu đồng hành  $O_i x_i y_i$  ( $i=2 \div 5$ );  $F$  - Lực căng nhánh cáp cuốn lên tang;  $h_0$  - khoảng cách từ khớp quay cần đến trục  $Ox$ ).

**Các tọa độ suy rộng:**  $\psi$  - Góc nâng cần;  $\phi$  - Góc quay tang cuốn cáp;  $\theta$  - Góc lắc vật nâng;  $s$  - Chiều dài cáp treo vật;  $q_{ei}$  - Tọa độ suy rộng đàn hồi khâu  $i$  ( $i=2 \div 5$ ).

**Động năng của cơ hệ:**

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_{load} + T_{hoist} \quad (1)$$

Trong đó:  $T_1$  là động năng của khâu 1;  $T_{hoist}$  là động năng của tang cuốn cáp;  $T_{load}$  là động năng của vật nâng;  $T_i$  là động năng của các khâu đàn hồi thứ  $i$  ( $i=2 \div 5$ ).

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\psi}^2; T_{hoist} = \frac{1}{2} J_h \dot{\phi}^2; T_{load} = \frac{1}{2} m_p v_p^2; \quad (2)$$

$$T_i = \frac{1}{2} \rho_i A_i \int_0^{L_i} v_{Pi}^2 dx.$$

Với:  $v_p$  là vận tốc của vật nâng;  $\rho_i$  là khối lượng riêng của vật liệu chế tạo khâu đàn hồi thứ  $i$ ;  $A_i$  là diện tích mặt cắt ngang của khâu đàn hồi thứ  $i$ ;  $v_{Pi}$  là vận tốc tại điểm bắt  $P_i$  trên khâu đàn hồi thứ  $i$ .

**Xác định vị trí, vận tốc và gia tốc các điểm:**

Vị trí gốc tọa độ địa phương, ( $i=2 \div 5$ ):

$$\mathbf{r}_{O_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ h_0 \end{bmatrix}; \mathbf{r}_{O_2} = \mathbf{r}_{O_1} + \begin{bmatrix} L_1 \cos \psi \\ L_1 \sin \psi \end{bmatrix}; \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_{O_{i+1}} = \mathbf{r}_{O_i} + \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_i \\ w_i(L_i, t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Vị trí điểm  $P_i$  bất kỳ trên khâu  $i$  ( $i = 2 \div 5$ ):

$$\mathbf{r}_{P_i} = \mathbf{r}_{O_i} + \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_i(x, t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\theta_i = \theta_{i-1} + q_{ai}; \theta_1 = \psi; q_{a2} = 0 \quad (6)$$

Trong đó:  $r_{O_i}$  là véc tơ tọa độ điểm gốc tọa độ địa phương;  $q_{ai}$  là góc tạo bởi tiếp tuyến tại điểm cuối khâu thứ ( $i-1$ ) so với trục  $O_i x_i$ ;  $w_i(x, t)$  là chuyển vị uốn ngang tương đối của khâu thứ  $i$  trong hệ quy chiếu đồng hành  $O_i x_i y_i$ ;  $x$  là tọa độ điểm  $P_i$  trên khâu thứ  $i$  trong hệ quy chiếu đồng hành  $O_i x_i y_i$ .

$$q_{ai} = w'_{i-1}(L_{i-1}, t), (i = 3, 5) \quad (7)$$

Vị trí vật nâng được xác định bởi biểu thức:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{O_6} + \begin{bmatrix} s \sin \theta \\ -s \cos \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

Đạo hàm các biểu thức (3), (4), (5), (8) để xác định vận tốc của các điểm:

$$\dot{\mathbf{r}}_{O_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{r}}_{O_2} = \dot{\mathbf{r}}_{O_1} + \begin{bmatrix} -L_1 \dot{\psi} \sin \psi \\ L_1 \dot{\psi} \cos \psi \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{O_{i+1}} = \dot{\mathbf{r}}_{O_i} + \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{w}_i(L_i, t) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -\sin \theta_i & -\cos \theta_i \\ \cos \theta_i & -\sin \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_i \\ w_i(L_i, t) \end{bmatrix} \dot{\theta}_i \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_{O_i} + \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{w}_i(x, t) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -\sin \theta_i & -\cos \theta_i \\ \cos \theta_i & -\sin \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_i(x, t) \end{bmatrix} \dot{\theta}_i \end{aligned} \quad (11)$$

Vận tốc của vật nâng được xác định bởi biểu thức:

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_{O_6} + \begin{bmatrix} \dot{s} \sin \theta + \dot{\theta} s \cos \theta \\ -\dot{s} \cos \theta + \dot{\theta} s \sin \theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$v_P^2 = \dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2; v_P^2 = \dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 \quad (13)$$

Thế biểu thức (13) vào biểu thức (2) xác định được động năng của khâu đàn hồi thứ  $i$  và của vật nâng:

$$T_i = \frac{1}{2} \rho_i A_i \int_0^{L_i} (\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2) dx; T_{load} = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2) \quad (14)$$

**Thế năng của cơ hệ:** Thế năng của cơ hệ bằng tổng thế năng đàn hồi ( $\Pi_S$ ) và thế năng trọng lực ( $\Pi_g$ ):

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi_g + \Pi_S = \Pi_1 + \Pi_P + \Pi_2 + \Pi_3 \\ + \Pi_4 + \Pi_5 + \Pi_r + \Pi_l \end{aligned} \quad (15)$$

Trong đó:  $\Pi_l, \Pi_p$  là thế năng do trọng lực của khâu 1 và vật nâng:

$$\Pi_1 = m_1 g l_{C_1} \sin \psi; \Pi_P = m_p g y_P \quad (16)$$

Với:  $g$  là gia tốc trọng trường;  $l_{C_1}$  là khoảng cách từ trọng tâm khâu 1 đến khớp nối chân cần;  $y_P$  là chiều cao của vật nâng (xác định theo công thức (8)).

Thế năng biến dạng đàn hồi của khâu đàn hồi thứ  $i$  ( $i=2 \div 5$ ) được xác định theo công thức:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} E_i I_i \int_0^{L_i} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (17)$$

Trong đó:  $E_i$  là mô đun đàn hồi của vật liệu;  $I_i$  là mô men quán tính mặt cắt ngang của khâu đàn hồi thứ  $i$ .

Thế năng biến dạng đàn hồi của cáp:

$$\Pi_r = \frac{1}{2} k_p \Delta l_p^2 = \frac{1}{2} k_p (\Delta l_{ps} + \Delta l_{pd})^2 \quad (18)$$

Trong đó:  $\Delta l_p$  là biến dạng đàn hồi của cáp;  $\Delta l_{ps}, \Delta l_{pd}$  là biến dạng tĩnh và động của cáp tương ứng.

$$\Delta l_{ps} = \frac{m_p g}{ak_p}; \Delta l_{pd} = a(s - s_0) + R_h(\phi - \phi_0) \quad (19)$$

với:  $s_0$  và  $\phi_0$  là chiều dài cáp treo vật và góc quay tang cuốn cáp tương ứng tại thời điểm ban đầu.

Thế năng biến dạng đàn hồi của xy lanh thủy lực nâng hạ cần:

$$\Pi_l = \frac{1}{2} k_l \Delta l_l^2 = \frac{1}{2} k_l (KI(\psi) - KI(\psi_0))^2 \quad (20)$$

Trong đó:  $\Delta l_l$  là biến dạng đàn hồi của xy lanh;  $KI(\psi), KI(\psi_0)$  là chiều dài của xy lanh nâng hạ cần tại thời điểm ban đầu và tại thời điểm xét.

$$KI(\psi_0) = \sqrt{d^2 + n^2 - 2dn \cos(\psi_0 + \gamma)} \quad (21)$$

$$KI(\psi) = \sqrt{d^2 + n^2 - 2dn \cos(\psi + \gamma)}$$

Với:  $d, n, \gamma$  là các thông số kết cấu (Hình 1).

**Hàm hao tán của cơ hệ:** Hàm hao tán của cơ hệ bao gồm hàm hao tán của cáp nâng vật ( $\Phi_r$ ) và hàm hao tán của xy lanh thủy lực ( $\Phi_l$ ):

$$\Phi = \Phi_r + \Phi_l \quad (22)$$

$$\Phi_r = \frac{1}{2} b_p \dot{\Delta l}_p^2 = \frac{1}{2} b_p (a\dot{s} + R_h \dot{\phi})^2 \quad (23)$$

$$\Phi_l = \frac{1}{2} b_l \dot{\Delta l}_l^2 = \frac{1}{2} b_l \frac{(dn \sin(\psi + \gamma) \dot{\psi}^2)^2}{d^2 + n^2 - 2dn \cos(\psi + \gamma)} \quad (24)$$

**Lực suy rộng của các lực hoạt động không thế:**

$$Q_\psi = M_l, Q_\phi = M_h, Q_\theta = Q_s = 0. \quad (25)$$

Theo tài liệu [3], trong trường hợp vận hành cần trục bằng tay, động cơ AC truyền công suất đến các bộ truyền động bao gồm mô tơ dẫn động cơ cấu nâng vật, xy lanh nâng hạ cần. Giá trị của mô-men các bộ truyền động này đặc trưng cho 2 pha làm việc là khởi động  $M_{ht}$  ( $M_{ht}$ ) và sau đó là pha ổn định  $M_{hs}$  ( $M_{hs}$ ). Các số hạng nhất thời thu được từ các đường cong động biểu diễn phản ứng giữa mômen và tốc độ, được mô hình hóa theo thời gian theo công thức sau:

$$M_r = M_s + (M_{\max} - M_s) \left( 1 - \frac{t^2}{t_s^2} \right) \quad (26)$$

Trong đó:  $t_s$  là thời gian khởi động.

Đối với cơ cấu nâng vật:

$$M_{l_{\max}} = 1, 4M_{hs}; M_{hs} = 1, 4R_h(m_p/a)g \quad (27)$$

Đối với cơ cấu nâng cần:

Từ phương trình cân bằng mô-men tại khớp quay chân cần ( $O_1$ ) xác định được  $M_{hs}$  như sau:

$$M_{ls} = \left[ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^5 m_i (z_{i-1} + L_i / 2) \cos \psi \\ + m_p (L \cos \psi + s \cdot \sin \theta) \end{array} \right] g - F \cdot k \quad (28)$$

$$z_0 = 0; z_i = z_{i-1} + L_i; L = \sum_{i=1}^5 L_i; F = \frac{m_p g}{a\eta} \quad (29)$$

Với:  $k$  là khoảng cách từ  $O_I$  đến nhánh cáp dọc cần;  $\eta$  là hiệu suất của puli đầu cần.

$$M_{lmax} = 1,4M_{ls} \quad (30)$$

**Phương trình vi phân chuyển động:**

Chuyển vị uốn ngang tương đối  $w_i(x,t)$  trong hệ quy chiếu  $O_i x_i y_i$  được khai triển ở dạng riêng thứ nhất:

$$w_i(x,t) = X_i(x) q_{ei}(t) \quad (31)$$

Trong đó:  $w_i(x,t)$  là chuyển vị uốn ngang của khâu  $i(i=2 \div 5)$ ;  $X_i(x)$  là các hàm thỏa mãn điều kiện biên của khâu đàn hồi;  $q_{ei}(t)$  là các tọa độ suy rộng phụ thuộc vào thời gian.

Theo phương pháp Ritz-Galerkin trong trường hợp thành một đầu ngàm một đầu tự do thì  $X_i(x)$  có phương trình đặc trưng:

$$1 + \cos \beta_i L_i \cosh \beta_i L_i = 0 \quad (32)$$

Giải hệ phương trình (32) nhận được các trị riêng  $\beta_i L_i, i(i=2 \div 5)$ . Giá trị nghiệm thứ nhất [1]:  $\beta_i L_i = 1,875$ .

Từ đó ta có các hàm  $X_i(x)$  có dạng:

$$X_i(x) = \cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x) + \frac{\cos \beta_i L_i + \cosh \beta_i L_i}{\sin \beta_i L_i + \sinh \beta_i L_i} (-\sin(\beta_i x) + \sinh(\beta_i x)) \quad (33)$$

Thế biểu thức (31) vào biểu thức (7):

$$q_{ai}(t) = w'_{i-1}(L_{i-1}, t) = X'_{i-1}(L_{i-1}) q_{e(i-1)}(t) \quad (i = \overline{3,5}) \quad (34)$$

Thế biểu thức (31) vào biểu thức (10):

$$\dot{\mathbf{r}}_{O_{i+1}} = \dot{\mathbf{r}}_{O_i} + \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ X_i(L_i) \dot{q}_{ei}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \theta_i & -\cos \theta_i \\ \cos \theta_i & -\sin \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_i \\ X_i(L_i) q_{ei}(t) \end{bmatrix} \dot{\theta}_i \quad (i = \overline{2,5}) \quad (35)$$

Thế biểu thức (31) vào biểu thức (11):

$$\dot{\mathbf{r}}_{P_i} = \dot{\mathbf{r}}_{O_i} + \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ X_i(x) \dot{q}_{ei}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \theta_i & -\cos \theta_i \\ \cos \theta_i & -\sin \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ X_i(x) \dot{q}_{ei}(t) \end{bmatrix} \dot{\theta}_i \quad (i = \overline{2,5}) \quad (36)$$

Ta chọn các tọa độ suy rộng:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8]^T \quad (37)$$

$$= [\psi \quad q_{e2} \quad q_{e3} \quad q_{e4} \quad q_{e5} \quad s \quad \theta \quad \phi]^T$$

Áp dụng phương trình Lagrange loại II cho cơ hệ để viết phương trình vi phân chuyển động [2]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (i = 1 \div 8) \quad (38)$$

Thế các biểu thức động năng, thế năng, hàm hao tán vào phương trình (38) nhận được hệ phương trình vi phân chuyển động mô tả ĐLH quá trình làm việc của cần trục được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q} \quad (39)$$

Tiếp theo, bài báo sẽ trình bày chi tiết các bước xác định các ma trận khối lượng suy rộng, ma trận quán tính ly tâm/Coriolis, véc tơ cân suy rộng, véc tơ lực suy rộng của các lực có thể trong phương trình (39). Từ các biểu thức động của khâu rắn và tang cuốn cáp, ta thu được ma trận khối lượng ứng với các khâu:

$$T_{rigid} = T_1 + T_{hoist} = \frac{1}{2} J_1 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_h \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_r \dot{\mathbf{q}} \quad (40)$$

với  $\mathbf{M}_r$  là ma trận đường chéo:

$$\mathbf{M}_r = \text{diag}([J_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad J_h]) \quad (41)$$

Từ các biểu thức động năng của khâu đàn hồi thứ  $i(i=2 \div 5)$ , ta khai triển vận tốc của các phần tử dầm qua ma trận Jacobi theo các tọa độ suy rộng:

$$T_i = \frac{1}{2} \rho_i A_i \int_0^{L_i} v_{P_i}^2 dx = \frac{1}{2} \frac{m_i}{L_i} \int_0^{L_i} (\dot{\mathbf{r}}_{P_i}^T \dot{\mathbf{r}}_{P_i}) dx \quad (42)$$

Với  $m_i$  là khối lượng của dầm:  $m_i = \rho_i A_i L_i$ .

Ma trận Jacobi của  $P_i$  trên dầm:

$$\mathbf{J}_{P_i}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial \mathbf{q}} \quad (43)$$

Vận tốc của phần tử trên dầm:

$$\dot{\mathbf{r}}_{P_i} = \mathbf{J}_{P_i}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (44)$$

Thế biểu thức (43), (44) vào (42), động năng của các khâu đàn hồi:

$$T_i = \frac{1}{2} \frac{m_i}{L_i} \int_0^{L_i} (\dot{\mathbf{r}}_{P_i}^T \dot{\mathbf{r}}_{P_i}) dx = \frac{1}{2} \frac{m_i}{L_i} \dot{\mathbf{q}}^T \left[ \int_0^{L_i} (\mathbf{J}_{P_i}^T \mathbf{J}_{P_i}) dx \right] \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [\mathbf{M}_{ei}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}} \quad (45)$$

Với ma trận khối lượng của các khâu đàn hồi:

$$M_{ei}(\mathbf{q}) = \frac{m_i}{L_i} \int_0^{L_i} (\mathbf{J}_{pi}^T \mathbf{J}_{pi}) dx \quad (46)$$

Động năng của vật nâng:

$$T_{load} = \frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_p \dot{\mathbf{r}}_p^T \dot{\mathbf{r}}_p \quad (47)$$

Vận tốc của vật nâng:

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \mathbf{J}_p(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (48)$$

Với ma trận Jacobi của vật nâng:

$$\mathbf{J}_p(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial \mathbf{q}} \quad (49)$$

Thế các biểu thức (49), (48) vào (47), động năng của vật nâng được xác định bởi biểu thức:

$$\begin{aligned} T_{load} &= \frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_p \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} m_p \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{load}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (50)$$

Với ma trận khối lượng của vật nâng:

$$\mathbf{M}_{load}(\mathbf{q}) = m_p \mathbf{J}_p^T \mathbf{J}_p \quad (51)$$

**Ma trận khối lượng của hệ:**

Từ các biểu thức động năng và ma trận khối lượng (40), (41), (42), (43), (46), (47), (49), (51), ta thu được động năng của cơ hệ:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (52)$$

Ma trận khối lượng của hệ:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{load}(\mathbf{q}) + \mathbf{M}_{e1}(\mathbf{q}) + \mathbf{M}_{e3}(\mathbf{q}) + \mathbf{M}_{e2}(\mathbf{q}) + \mathbf{M}_{e4}(\mathbf{q}) \quad (53)$$

**Ma trận quán tính ly tâm/Coriolis:**

Ma trận quán tính ly tâm và Coriolis được xác định nhờ sử dụng đạo hàm ma trận khối lượng suy rộng theo tọa độ suy rộng và tích Kronecker:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{I}_n \otimes \dot{\mathbf{q}}) + \left( \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{I}_n) \right) \\ - \left( \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{I}_n) \right)^T \end{bmatrix} \quad (54)$$

**Véc tơ lực cản suy rộng:**

$$\mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \quad (55)$$

**Ma trận độ cứng và thế năng biến dạng đàn hồi:**

Thế năng biến dạng đàn hồi của khâu đàn hồi của

khâu đàn hồi thứ  $i(i=2 \div 5)$  được xác định theo công thức (17) và khai triển theo dạng riêng (31):

$$\Pi_i = \frac{1}{2} E_i I_i \int_0^{L_i} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} E_i I_i \left[ \int_0^{L_i} (X_i''(x))^2 dx \right] q_{ei}^2 \quad (56)$$

Thế năng do biến dạng đàn hồi:

$$\begin{aligned} P_e &= \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^5 E_i I_i \left[ \int_0^{L_i} (X_i''(x))^2 dx \right] q_{ei}^2 \end{aligned} \quad (57)$$

Ký hiệu độ cứng do đàn hồi:

$$K_i = E_i I_i \int_0^{L_i} (X_i''(x))^2 dx \quad (58)$$

Khi đó thế năng biến dạng đàn hồi biểu diễn qua ma trận độ cứng:

$$P_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (59)$$

Với  $\mathbf{K}$  là ma trận đường chéo:

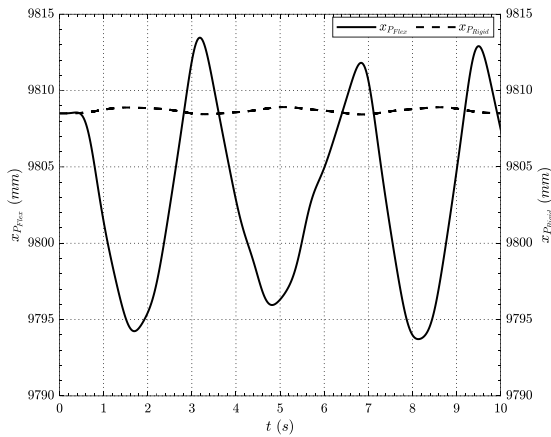
$$\mathbf{K} = \text{diag}([0 \ K_2 \ K_3 \ K_4 \ K_5 \ 0 \ 0 \ 0]) \quad (60)$$

### 3. Kết quả khảo sát

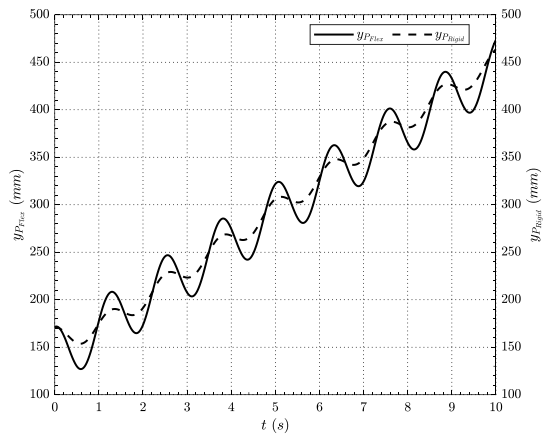
Hệ phương trình (39) là hệ phương trình vi phân cấp 2 phi tuyến mô tả ĐLH quá trình làm việc của cần trục kể đến biến dạng cần. Hệ phương trình (39) cho phép khảo sát các thông số ĐLH quá trình làm việc của cần trục cả khi cần biến dạng hoặc khi cần cứng (bỏ các thông số biến dạng của cần). Trong bài báo, tác giả khảo sát một số thông số quỹ đạo vật nâng khi chỉ có cơ cấu nâng làm việc (góc nâng cần cố định) trong hai trường hợp: Cần cứng và cần biến dạng để đánh giá ảnh hưởng của biến dạng cần đến quỹ đạo vật nâng (Trong trường hợp cần cứng:  $q_{ei} = 0$ ).

**Thông số đầu vào.** Bài báo tiến hành khảo sát động lực học của cần trục lắp trên xe vận tải UNIC 344 với bộ thông số đầu vào như sau:  $\psi=1^0$ ,  $m_p=480$  kg;  $m_l=102,671$  kg;  $J_l=17,032$  Nm;  $J_h=15050$  Nm;  $i_h=11/216$ ;  $R_h=0,15$  m;  $a=4$ ;  $k_p=3 \times 10^4$  N/m;  $b_p=100$  Ns/m;  $k_l=22 \times 10^4$  N/m;  $b_l=500$  Ns/m;  $E=210$  Gpa;  $\rho=7860$  Kg/m<sup>3</sup>;  $h_l=3$  m;  $A_2=10,662 \times 10^{-3}$  m<sup>2</sup>;  $A_3=8,861 \times 10^{-3}$  m<sup>2</sup>;  $A_4=7,28 \times 10^{-3}$  m<sup>2</sup>;  $A_5=5,948 \times 10^{-3}$  m<sup>2</sup>;  $I_2=19,768 \times 10^{-5}$  m<sup>4</sup>;  $I_3=14,352 \times 10^{-5}$  m<sup>4</sup>;  $I_4=10,322 \times 10^{-5}$  m<sup>4</sup>;  $I_5=7,512 \times 10^{-5}$  m<sup>4</sup>;  $\eta=0,98$ ;  $k=0,15$  m;  $L_1=0,66$  m;  $L_2=2,4843$  m;  $L_3=2,2903$  m;  $L_4=2,1303$  m;  $L_5=2,2451$  m.

Chế độ làm việc của máy: Vật nâng đã tách khỏi bề mặt đứng của máy, thời gian khởi động  $t_s=2s$ . Vận tốc ban đầu của các khâu bằng 0. Với bộ số liệu nêu trên, sau khi tính toán trên phần mềm Maple và Matlab

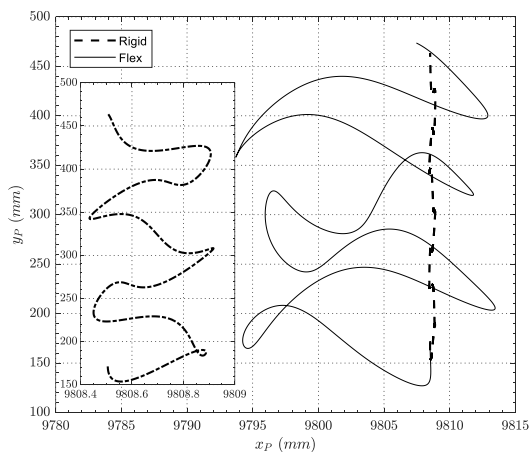


**Hình 2. Chuyển vị vật nâng theo phương Ox**



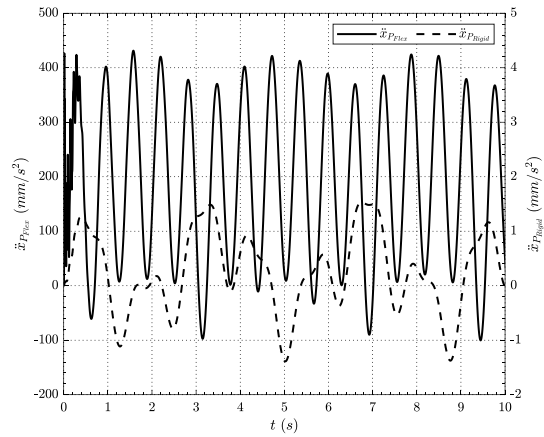
**Hình 4. Chuyển vị vật nâng theo phương Oy**

để giải phương trình (39) nhận được kết quả mô phỏng các thông số quỹ đạo chuyển động của vật nâng trong trường hợp chỉ có cơ cấu nâng làm việc thể hiện trên các Hình 2÷6.

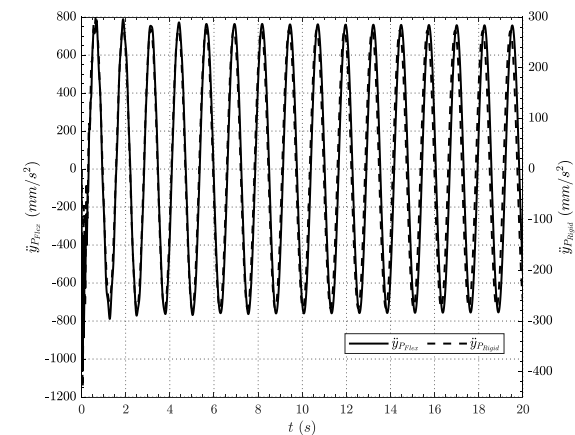


**Hình 6. Quỹ đạo chuyển động của vật nâng**

Từ kết quả thu được nhận thấy rằng: Chuyển vị và



**Hình 3. Gia tốc dao động vật nâng theo phương Ox**



**Hình 5. Gia tốc dao động vật nâng theo phương Oy**

gia tốc dao động vật nâng theo cả hai phương khi cần cứng là rất nhỏ, nguyên nhân là do dao động vật nâng sinh ra là do đàn hồi của xy lanh thủy lực nâng hạ cần và cáp treo vật. Tuy nhiên, trong trường hợp cần biến dạng, yếu tố biến dạng của cần làm cho chuyển vị và gia tốc dao động của vật nâng theo cả hai phương lớn hơn rất nhiều so với khi cần cứng.

Từ đồ thị Hình 6 nhận thấy rằng, vùng quỹ đạo của vật nâng trong quá trình nâng vật khi cần biến dạng là rộng hơn so với khi cần cứng (gần như vật nâng di chuyển thẳng đứng).

#### 4. Kết luận

Như vậy, bài báo đã xây dựng được mô hình ĐLH và hệ phương trình vi phân mô tả quá trình làm việc của cần trục ống lồng khi kể đến biến dạng cần với 4 khâu đàn hồi. Mô hình xây dựng cho phép khảo sát các thông số ĐLH cần trục ống lồng khi kết hợp cả cơ cấu nâng hạ vật và cơ cấu nâng cần làm việc đồng thời hoặc từng cơ cấu làm việc riêng lẻ. Ngoài ra, bài báo tiến hành khảo sát ảnh hưởng biến dạng cần đến các thông số ĐLH cần trục khi chỉ có cơ cấu nâng vật làm

việc. Kết quả đạt được của bài báo có thể làm cơ sở cho bài toán tính toán thiết kế hoặc xây dựng và thiết kế hệ thống điều khiển cho cần trục ống lồng.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Văn Khang (2005), *Dao động kỹ thuật*, (in lần thứ 4), NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [2] Nguyễn Văn Khang (2017), *Động lực học hệ nhiều vật*, (in lần thứ 2), NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [3] Le Van Duong, Le Anh Tuan (2022), *Modeling and observer-based robust controllers for telescopic truck cranes*, Mechanism and Machine Theory, Vol.173, 104869.
- [4] Bozhidar Grigorov, Rosen Mitrev (2017), *Dynamic behavior of a hydraulic crane operating a freely suspended payload*, Journal of Zhejiang University-SCIENCE A, Vol.18 (4), pp.268-281.
- [5] Radomir Mijailović (2011), *Modelling the dynamic behaviour of the truck-crane*, Transport, Vol.26, Issue 4.
- [6] Arkadiusz Trąbka (2014), *Dynamics of telescopic cranes with flexible structural components*, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.88, pp.162-174.
- [7] Bogdan Posiadala, Dawid Cekus (2008), *Discrete model of vibration of truck crane telescopic boom with consideration of the hydraulic cylinder of crane radius change in the rotary plane*, Automation in Construction, Vol.17, pp.245-250.
- [8] Hiroki Fujita, Hiroyuki Sugiyama (2012), *Development of flexible telescopic boom model using absolute nodal coordinate formulation sliding joint constraints with LuGre friction*, Theoretical & Applied mechanics letters, Vol.2, 063005.

Ngày nhận bài:	17/07/2023
Ngày nhận bản sửa lần 01:	05/08/2023
Ngày nhận bản sửa lần 02:	12/08/2023
Ngày duyệt đăng:	17/08/2023