ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA CÁC ÁNH XẠ CO NHỜ HÀM C-LỚP VỚI TÍNH CHẤT (E.A) TRONG KHÔNG GIAN b-MÊTRIC

Trần Văn Ân(1), **Lê Đức Anh**(2)
1 *Viện Sư phạm Tự nhiên, Trường Đại học Vinh*
2 *Trường Đại học Tây Nguyên*
Ngày nhận bài 09/10/2018, ngày nhận đăng 05/11/2018

Tóm tắt. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh định lý điểm bất động chung của các ánh xạ co nhờ các hàm C-lớp với tính chất (E.A) trong không gian b-mêtric và cho ví dụ minh họa. Từ đó, chúng tôi cũng chỉ ra rằng các kết quả chính của Ozturk, Radenovic (*Some remarks on b-(E.A)-property in b-metric spaces*, Springer Plus, **5: 544** (2016)) và Ozturk, Turkoglu (*Common fixed point for mappings satisfying (E.A)-property in b-metric spaces*, J. Nonlinear Sci. Appl., **8** (2015), 1127 - 1133) là hệ quả của nó.

1 MỞ ĐẦU

Lý thuyết điểm bất động là một trong những chủ đề nghiên cứu quan trọng của Giải tích toán học. Đây cũng là một trong những công cụ quan trọng để nghiên cứu các hiện tượng phi tuyến. Nó có nhiều ứng dụng trong toán học cũng như trong các ngành khoa học kỹ thuật, trong tối ưu, lý thuyết xấp xỉ, các mô hình toán học và lý thuyết kinh tế. Nguyên lý ánh xạ co Banach đã trở thành một công cụ phổ dụng để chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm của các phương trình vi phân và phương trình tích phân, cũng như giải quyết các bài toán về sự tồn tại trong nhiều ngành của Giải tích toán học và được ứng dụng vào các ngành khoa học khác. Vì thế đã có một số lớn các mở rộng của định lý cơ bản này cho các lớp ánh xạ và không gian khác nhau, bằng cách điều chỉnh điều kiện co cơ bản hoặc thay đổi không gian.

Năm 1993, để mở rộng các không gian mêtric, Czerwik đã đưa ra khái niệm không gian b-mêtric và chứng minh một vài kết quả mới về sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ co trong không gian b-mêtric. Năm 2002, Aamri và Moutawakil [1] đã đưa ra ý tưởng về tính chất (E.A) trong không gian mêtric. Gần đây, một số nhà nghiên cứu đã vận dụng ý tưởng này để thu được một số kết quả mới về điểm bất động của các ánh xạ co suy rộng với tính chất (E.A) trong không gian b-mêtric.

Năm 2017, Ozturk và Ansari đã phát biểu và chứng minh kết quả về điểm bất động chung của các ánh xạ co nhờ các hàm C-lớp với tính chất (E.A) trong không gian b-mêtric trong ([6]). Tuy nhiên, Ozturk và Ansari đã nhầm lẫn trong chứng minh kết quả này khi thừa nhận rằng b-mêtric d là hàm liên tục theo từng biến. Song điều này là không hoàn

1) Email: tvandhv@gmail.com (T. V. Ân).

toàn đúng và nó đã được Trần Văn Ân, Nguyễn Văn Dũng và Lương Quốc Tuyển chỉ ra thông qua Ví dụ 3.9 và Ví dụ 3.10 trong [2].

Trong quá trình tìm cách khắc phục lỗi trên trong lập luận chứng minh của Ozturk và Ansari, chúng tôi giới thiệu và chứng minh một định lý điểm bất động chung cho các ánh xạ co nhờ các hàm C-lớp với tính chất (E.A) trong không gian b-mêtric. Từ đó, chỉ ra rằng các kết quả của chúng tôi là mở rộng các kết quả đã có trong [7] và [8].

Trước hết chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và kết quả cần thiết cho các trình bày về sau.

Định nghĩa 1.1. ([4]) Cho X là một tập khác rỗng và số thực $s \geq 1$. Hàm $d : X \times X \to [0, +\infty)$ được gọi là một *b-mêtric*, nếu với mọi $x, y, z \in X$, các điều kiện sau đây được thỏa mãn

(1) $d(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, y) \leq s[d(x, z) + d(z, y)]$.

Khi đó, (X, d) được gọi là *không gian b-mêtric* với hệ số s.

Định nghĩa 1.2. ([4]) Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong không gian b-mêtric (X, d).

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* nếu với $x \in X$ nào đó ta có $d(x_n, x) \to 0$ khi $n \to \infty$;

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *Cauchy* nếu $d(x_n, x_m) \to 0$ khi $n, m \to \infty$;

(3) Không gian b-mêtric (X, d) là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy trong X đều là hội tụ.

Nhận xét rằng: dãy $\{x_n\}$ là Cauchy nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0$, với mọi $p > 0$.

Định lý 1.3. ([4]) *Trong không gian b-mêtric (X, d), các khẳng định sau là đúng*
(1) *Dãy hội tụ có giới hạn duy nhất;*
(2) *Mỗi dãy hội tụ là dãy Cauchy;*
(3) *Nói chung, một b-mêtric thì không liên tục.*

Định nghĩa 1.4. ([4]) Cho (X, d) là không gian b-mêtric. Tập con $Y \subset X$ được gọi là *đóng* nếu với mỗi dãy $\{x_n\}$ trong Y mà nó là hội tụ đến phần tử x, thì $x \in Y$.

Định nghĩa 1.5. ([8]) Cho (X, d) là không gian b-mêtric, $f,\ g : X \to X$ là các ánh xạ từ X vào chính nó.

(1) f và g được gọi là *tương thích* với nhau nếu với bất kì dãy $\{x_n\} \subset X$ sao cho $\{fx_n\}$ và $\{gx_n\}$ là hội tụ tới điểm $t \in X$ nào đó, thì $\lim\limits_{n\to\infty} d(fgx_n, gfx_n) = 0$;

(2) f và g được gọi là *không tương thích* với nhau nếu tồn tại ít nhất một dãy $\{x_n\} \subset X$ sao cho $\{fx_n\}$ và $\{gx_n\}$ là hội tụ tới điểm $t \in X$ nào đó, nhưng $\lim\limits_{n\to\infty} d(fgx_n, gfx_n)$ khác không hoặc không tồn tại;

(3) f và g được gọi là *thỏa mãn tính chất (E.A)* nếu tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset X$ sao cho $\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = t$, với t nào đó thuộc X.

Định nghĩa 1.6. ([8]) Gọi Ψ là họ tất cả các *hàm thay đổi khoảng cách* $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau

(ψ_1) ψ là hàm không giảm và liên tục;

(ψ_2) $\psi(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = 0$.

Định nghĩa 1.7. ([5]) Gọi Φ là họ tất cả các *hàm siêu thay đổi khoảng cách* $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau

(φ_1) φ là hàm không giảm và liên tục;

(φ_2) $\varphi(t) > 0$, nếu $t > 0$.

Định nghĩa 1.8. ([3]) Ánh xạ $F : [0,\infty)) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, được gọi là *hàm C-lớp* nếu nó liên tục và thỏa mãn các điều kiện sau

(1) $F(s,t) \le s$, với mọi $s,t \in [0,\infty)$;

(2) Nếu $F(s,t) = s$, thì hoặc $s = 0$, hoặc $t = 0$.

2 KẾT QUẢ CHÍNH

Trong bài báo này, khi nói (X,d) là không gian b-mêtric thì được hiểu (X,d) là không gian b-mêtric với hệ số $s \ge 1$.

Năm 2017, Ozturk và Ansari đã phát biểu và chứng minh kết quả sau ([6]):

Cho (X,d) là không gian b-mêtric và $f,g,S,T : X \to X$ là các ánh xạ từ X vào chính nó, thỏa mãn $f(X) \subseteq T(X)$ và $g(X) \subseteq S(X)$ sao cho với mọi $x,y \in X$, ta có

$$\psi(d(fx,gy)) \le F(\psi(M_s(x,y)), \varphi(M_s(x,y))),$$

trong đó

$$M_s(x,y) = \max\left\{d(Sx,Ty), d(fx,Sx), d(gy,Ty), \frac{d(fx,Ty)+d(Sx,gy)}{2s}\right\}.$$

Giả sử rằng một trong các cặp ánh xạ (f,S) và (g,T) thỏa mãn tính chất (E.A) và một trong các không gian con $f(X), g(X), S(X)$ và $T(X)$ là đóng trong X. Khi đó, các cặp ánh xạ (f,S) và (g,T) có một điểm trùng nhau trong X. Hơn nữa, nếu các cặp ánh xạ (f,S) và (g,T) là tương thích yếu, thì f,g,S,T có một điểm bất động chung duy nhất.

Tuy nhiên, khi chứng minh kết quả trên các tác giả đã sử dụng b-mêtric d là hàm liên tục theo từng biến. Song điều này là không hoàn toàn đúng và nó đã được Trần Văn Ân, Nguyễn Văn Dũng và Lương Quốc Tuyển chỉ ra thông qua Ví dụ 3.9 và Ví dụ 3.10 trong [2].

Trong quá trình tìm cách khắc phục sai lầm trên trong lập luận chứng minh của Ozturk và Ansari chúng tôi thu được kết quả sau:

Định lý 2.1. *Cho (X, d) là không gian b-mêtric và $f, g, S, T : X \to X$ là các ánh xạ từ X vào chính nó sao cho thỏa mãn các điều kiện sau*

(1) *Tồn tại các hàm $\psi \in \Psi$, $\varphi \in \Phi$ và hàm C-lớp $F : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y \in X$, ta có*

$$\psi\left(sd\left(fx, gy\right)\right) \le F\left(\psi\left(M_s\left(x, y\right)\right), \varphi\left(M_s\left(x, y\right)\right)\right), \tag{1}$$

trong đó

$$M_s(x, y) = \max\left\{d(Sx, Ty), d(fx, Sx), d(gy, Ty), \frac{d(fx, Ty) + d(Sx, gy)}{2s}\right\};$$

(2) *(f, S) hoặc (g, T) thỏa mãn tính chất (E.A);*

(3) *$fX \subset TX$ và $gX \subset SX$;*

(4) *Miền giá trị của một trong các ánh xạ f, g, S hoặc T là không gian con đóng của X.*

Khi đó, các cặp (f, S) và (g, T) có một giá trị trùng nhau trong X. Hơn nữa, nếu thỏa mãn thêm điều kiện

(5) (f, S) và (g, T) là các cặp ánh xạ tương thích yếu,

thì f, g, S và T có một điểm bất động chung duy nhất.

Chứng minh. 1) Trước hết giả sử rằng cặp ánh xạ (f, S) thỏa mãn tính chất (E.A). Khi đó tồn tại một dãy $\{x_n\}$ trong X sao cho $\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = q$, với điểm q nào đó thuộc X. Nhờ giả thiết $f(X) \subset T(X)$, tồn tại một dãy $\{y_n\} \subset X$ sao cho $fx_n = Ty_n$ với mọi $n \ge 1$. Vì thế, ta có $\lim_{n\to\infty} Ty_n = q$. Ta sẽ chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} gy_n = q$. Thật vậy, nhờ tính không giảm của hàm ψ, điều kiện co (1) và điều kiện của F, ta có

$$\begin{aligned}\psi\left(d\left(fx_n, gy_n\right)\right) &\le \psi\left(sd\left(fx_n, gy_n\right)\right)\\ &\le F\left(\psi\left(M_s\left(x_n, y_n\right)\right), \varphi\left(M_s\left(x_n, y_n\right)\right)\right) \le \psi\left(M_s\left(x_n, y_n\right)\right),\end{aligned} \tag{2}$$

với

$$\begin{aligned}M_s\left(x_n, y_n\right) &= \max\left\{d\left(Sx_n, Ty_n\right), d\left(fx_n, Sx_n\right), d\left(Ty_n, gy_n\right), \frac{d\left(Sx_n, gy_n\right) + d\left(fx_n, Ty_n\right)}{2s}\right\}\\ &= \max\left\{d\left(Sx_n, fx_n\right), d\left(fx_n, Sx_n\right), d\left(fx_n, gy_n\right), \frac{d\left(Sx_n, gy_n\right) + d\left(fx_n, fx_n\right)}{2s}\right\}\\ &\le \max\left\{d\left(Sx_n, fx_n\right), d\left(fx_n, gy_n\right), \frac{s\left[d\left(Sx_n, fx_n\right) + d\left(fx_n, gy_n\right)\right]}{2s}\right\}.\end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức cuối cùng này ta suy ra

$$\limsup_{n\to\infty} d(fx_n, gy_n) = \limsup_{n\to\infty} M_s(x_n, y_n).$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng

$$\lim_{n\to\infty} d(fx_n, gy_n) = \lim_{n\to\infty} M_s(x_n, y_n).$$

Nhờ tính liên tục của ψ và φ, lấy giới hạn khi $n \to \infty$ trong công thức (2), ta có

$$\begin{aligned}\psi(\lim_{n\to\infty} d(fx_n, gy_n)) &\le F(\psi(\lim_{n\to\infty} d(fx_n, gy_n)), \varphi(\lim_{n\to\infty} d(fx_n, gy_n)))\\ &\le \psi(\lim_{n\to\infty} d(fx_n, gy_n)).\end{aligned}$$

Vì thế ta có

$$F(\psi(\lim_{n\to\infty} d(fx_n, gy_n)), \varphi(\lim_{n\to\infty} d(fx_n, gy_n))) = \psi(\lim_{n\to\infty} d(fx_n, gy_n)).$$

Nhờ tính chất của hàm C-lớp F, điều này kéo theo

$$\psi(\lim_{n\to\infty} d(fx_n, gy_n)) = 0 \quad \text{hoặc} \quad \varphi(\lim_{n\to\infty} d(fx_n, gy_n)) = 0.$$

Từ các tính chất của các hàm ψ và φ ta suy ra $\lim_{n\to\infty} d(fx_n, gy_n) = 0$. Vì thế, nhờ giả thiết $\lim_{n\to\infty} fx_n = q$, từ bất đẳng thức

$$0 \le d(q, gy_n) \le s[d(q, fx_n) + d(fx_n, gy_n)],$$

ta suy ra $\lim_{n\to\infty} gy_n = q$.

a) Bây giờ giả sử rằng $T(X)$ là không gian con đóng trong X. Khi đó, vì $\lim_{n\to\infty} fx_n = q$ và $f(X) \subset T(X)$, nên tồn tại một phần tử $r \in X$, sao cho $Tr = q$. Nhờ điều kiện co (2) và điều kiện của F, ta có

$$\psi\left(sd\left(fx_n, gr\right)\right) \le F\left(\psi\left(M_s\left(x_n, r\right)\right), \varphi\left(M_s\left(x_n, r\right)\right)\right) \le \psi(M_s(x_n, r)), \tag{3}$$

với

$$\begin{aligned}M_s\left(x_n, r\right) &= \max\left\{d\left(Sx_n, Tr\right), d\left(fx_n, Sx_n\right), d\left(Tr, gr\right), \frac{d\left(fx_n, Tr\right) + d\left(Sx_n, gr\right)}{2s}\right\}\\ &= \max\left\{d\left(Sx_n, q\right), d\left(fx_n, Sx_n\right), d\left(q, gr\right), \frac{d\left(fx_n, q\right) + d\left(Sx_n, gr\right)}{2s}\right\}.\end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức cuối cùng này ta suy ra $\lim_{n\to\infty} M_s(x_n, r) = d(q, gr)$. Do đó, nhờ tính liên tục của ψ và φ, lấy giới hạn khi $n \to \infty$ trong công thức (3), ta có

$$\begin{aligned}\psi(\lim_{n\to\infty} sd(fx_n, gr) &\le F(\psi(\lim_{n\to\infty} M_s(x_n, r)), \varphi(\lim_{n\to\infty} M_s(x_n, r)))\\ &= F(\psi(d(q, gr)), \varphi(d(q, gr))) \le \psi(d(q, gr)).\end{aligned} \tag{4}$$

Mặt khác, ta có $d(q, gr) \leq s[d(q, fx_n) + d(fx_n, gr)]$. Do đó, vì $\lim\limits_{n\to\infty} fx_n = q$, ta nhận được

$$d(q, gr) \leq \lim_{n\to\infty} sd(fx_n, gr).$$

Từ đó, nhờ tính không giảm của hàm ψ, ta suy ra

$$\psi(d(q, gr)) \leq \psi(\lim_{n\to\infty} sd(fx_n, gr)). \tag{5}$$

Vì thế, từ (4) và (5) ta thu được

$$F(\psi(d(q, gr)), \varphi(d(q, gr))) = \psi(d(q, gr)).$$

Nhờ tính chất của hàm C-lớp F, điều này kéo theo $\psi(d(q, gr)) = 0$ hoặc $\varphi(d(q, gr)) = 0$, hay $q = gr$. Do đó r là một điểm trùng nhau của cặp ánh xạ (g, T).

Tương tự, vì $\lim\limits_{n\to\infty} gy_n = q$, $gr = q$ và $g(X) \subset S(X)$, nên tồn tại một điểm $z \in X$ sao cho $q = Sz$. Ta sẽ chứng minh rằng $Sz = fz$. Thật vậy, nhờ điều kiện co (1), tính không giảm của hàm ψ và điều kiện của F, ta có

$$\begin{aligned}\psi\left(d\left(fz, q\right)\right) &\leq \psi\left(sd\left(fz, q\right)\right) = \psi\left(sd\left(fz, gr\right)\right) \\ &\leq F\left(\psi\left(M_s\left(z, r\right)\right), \varphi\left(M_s\left(z, r\right)\right)\right) \leq \psi\left(M_s(z, r)\right),\end{aligned} \tag{6}$$

với

$$\begin{aligned}M_s\left(z, r\right) &= \max\left\{d\left(Sz, Tr\right), d\left(fz, Sz\right), d\left(Tr, gr\right), \frac{d\left(fz, Tr\right) + d\left(Sz, gr\right)}{2s}\right\} \\ &= \max\left\{d\left(q, q\right), d\left(fz, q\right), d\left(q, q\right), \frac{d\left(fz, q\right) + d\left(q, q\right)}{2s}\right\} \\ &\leq \max\left\{d\left(fz, q\right), \frac{d\left(fz, q\right)}{2s}\right\} \\ &= d\left(fz, q\right).\end{aligned}$$

Do đó, từ bất đẳng thức (6), ta thu được

$$\psi\left(d\left(fz, q\right)\right) \leq F\left(\psi\left(d\left(fz, q\right)\right), \varphi\left(d\left(fz, q\right)\right)\right) \leq \psi\left(d\left(fz, q\right)\right),$$

hay

$$F\left(\psi\left(d\left(fz, q\right)\right), \varphi\left(d\left(fz, q\right)\right)\right) = \psi\left(d\left(fz, q\right)\right).$$

Từ đẳng thức cuối này, vì F là hàm C-lớp, ta suy ra $\psi\left(d\left(fz, q\right)\right) = 0$ hoặc $\varphi\left(d\left(fz, q\right)\right) = 0$. Lại nhờ tính chất của hàm ψ và φ, ta thu được $d\left(fz, q\right) = 0$. Điều này kéo theo $fz = q$. Suy ra $Sz = fz = q$. Do đó z là điểm trùng nhau của cặp ánh xạ (f, S). Vì vậy, từ các chứng minh trên ta nhận được $fz = Sz = gr = Tr = q$. Điều này chứng tỏ q là giá trị trùng nhau của các cặp ánh xạ (f, S) và (g, T).

Bây giờ giả sử các cặp ánh xạ (f,S) và (g,T) là tương thích yếu. Khi đó, nhờ tính tương thích yếu của các cặp ánh xạ (f,S) và (g,T), ta thu được $fSz = Sfz$ và $gTr = Tgr$, nghĩa là ta có $fq = Sq$ và $gq = Tq$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh rằng q là điểm bất động chung của các ánh xạ f, g, S và T. Thật vậy, từ bất đẳng thức (1), tính không giảm của hàm ψ và điều kiện của F, ta có

$$\begin{aligned}\psi\left(d\left(fq,q\right)\right) &= \psi\left(d\left(fq,gr\right)\right) \le \psi\left(sd\left(fq,gr\right)\right) \\ &\le F\left(\psi\left(M_s\left(q,r\right)\right),\varphi\left(M_s\left(q,r\right)\right)\right) \le \psi\left(M_s\left(q,r\right)\right),\end{aligned} \tag{7}$$

với

$$\begin{aligned}M_s\left(q,r\right) &= \max\left\{d\left(Sq,Tr\right), d\left(fq,Sq\right), d\left(Tr,gr\right), \frac{d\left(fq,Tr\right)+d\left(Sq,gr\right)}{2s}\right\} \\ &= \max\left\{d\left(fq,q\right), d\left(fq,fq\right), d\left(q,q\right), \frac{d\left(fq,q\right)+d\left(fq,q\right)}{2s}\right\} = d\left(fq,q\right).\end{aligned}$$

Vì thế, từ bất đẳng thức (7) ta có

$$\psi\left(d\left(fq,q\right)\right) \le F\left(\psi\left(d\left(fq,q\right)\right),\varphi\left(d\left(fq,q\right)\right)\right) \le \psi\left(d\left(fq,q\right)\right),$$

hay

$$F\left(\psi\left(d\left(fq,q\right)\right),\varphi\left(d\left(fq,q\right)\right)\right) = \psi\left(d\left(fq,q\right)\right).$$

Từ đẳng thức cuối này, vì F là hàm C-lớp ta nhận được $\psi\left(d\left(fq,q\right)\right) = 0$ hoặc $\varphi\left(d\left(fq,q\right)\right) = 0$. Lại nhờ tính chất của hàm ψ và φ, ta suy ra $d\left(fq,q\right) = 0$. Điều này kéo theo $fq = q$. Vì vậy, ta thu được $fq = Sq = q$.

Tương tự, từ bất đẳng thức (1), tính không giảm của hàm ψ và điều kiện của F, ta có

$$\begin{aligned}\psi\left(d\left(q,gq\right)\right) &= \psi\left(d\left(fz,gq\right)\right) \le \psi\left(sd\left(fz,gq\right)\right) \\ &\le F\left(\psi\left(M_s\left(z,q\right)\right),\varphi\left(M_s\left(z,q\right)\right)\right) \le \psi\left(M_s(z,q)\right),\end{aligned} \tag{8}$$

với

$$\begin{aligned}M_s\left(z,q\right) &= \max\left\{d\left(Sz,Tq\right), d\left(fz,Sz\right), d\left(gq,Tq\right), \frac{d\left(fz,Tq\right)+d\left(Sz,gq\right)}{2s}\right\} \\ &= \max\left\{d\left(q,gq\right), d\left(q,q\right), d\left(gq,gq\right), \frac{d\left(q,gq\right)+d\left(q,gq\right)}{2s}\right\} = d\left(q,gq\right).\end{aligned}$$

Do đó, từ bất đẳng thức (7), ta có

$$\psi\left(d\left(q,gq\right)\right) \le F\left(\psi\left(d\left(q,gq\right)\right),\varphi\left(d\left(q,gq\right)\right)\right) \le \psi\left(d(q,gq)\right),$$

hay

$$F\left(\psi\left(d\left(q,gq\right)\right),\varphi\left(d\left(q,gq\right)\right)\right) = \psi\left(d(q,gq)\right).$$

Từ đẳng thức cuối này, vì F là hàm C-lớp ta nhận được $\psi(d(q,gq))=0$ hoặc $\varphi(d(q,gq))=0$. Bởi vậy, nhờ tính chất của hàm ψ và φ, ta suy ra $d(q,gq)=0$. Điều này kéo theo $gq=q$. Vì vậy, ta thu được $Tq=gq=q$. Do đó q là điểm bất động chung của các hàm f,g,S,T.

Bây giờ ta chứng minh q là điểm bất động duy nhất. Giả sử p là một điểm bất động chung khác của các hàm f,g,S,T. Khi đó, nhờ bất đẳng thức (1), tính không giảm của hàm ψ và điều kiện của F, ta có

$$\begin{aligned}\psi(d(q,p))&=\psi(d(fq,gp))\le\psi(sd(fq,gp))\\&\le F(\psi(M_s(q,p)),\varphi(M_s(q,p)))\le\psi(M_s(q,p)),\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}M_s(q,p)&=\max\left\{d(Sq,Tp),d(fq,Sq),d(Tp,gp),\frac{d(fq,Tp)+d(Sq,gp)}{2s}\right\}\\&=\max\left\{d(q,p),d(q,q),d(p,p),\frac{d(q,p)+d(q,p)}{2s}\right\}=d(q,p).\end{aligned}$$

Vì thế, ta nhận được bất đẳng thức

$$\psi(d(q,p))\le F(\psi(d(q,p)),\varphi(d(q,p)))\le\psi(d(q,p)),$$

hay

$$F(\psi(d(q,p)),\varphi(d(q,p)))=\psi(d(q,p)).$$

Do F là hàm C-lớp ta suy ra $\psi(d(q,p))=0$ hoặc $\varphi(d(q,p))=0$. Nhờ tính chất của hàm ψ và φ, ta có $d(q,p)=0$, tức là $q=p$. Vậy q là điểm bất động chung duy nhất của các ánh xạ f,g,S,T.

b) Trường hợp nếu $f(X)$ là không gian con đóng trong X. Khi đó, vì $\lim_{n\to\infty}fx_n=q$, nên ta có $q\in f(X)$. Lại vì $f(X)\subset T(X)$, suy ra $q\in T(X)$. Do đó, tồn tại một phần tử $r\in X$, sao cho $Tr=q$. Từ đây chứng minh tương tự như trường hợp $T(X)$ là không gian con đóng trong X ta suy ra các ánh xạ f,g,S,T có điểm bất động chung duy nhất trong X.

c) Trường hợp nếu $S(X)$ là không gian con đóng trong X, chứng minh tương tự như trường hợp a).

d) Trường hợp nếu $g(X)$ là không gian con đóng trong X, chứng minh tương tự như trường hợp b).

2) Cuối cùng, trường hợp cặp (g,T) thỏa mãn tính chất (E.A) ta tiến hành chứng minh tương tự như trường hợp cặp ánh xạ (f,S) thỏa mãn tính chất (E.A).

Trong Định lí 2.1, nếu ta lấy $g=f$ và $S=T$, thì ta có được các hệ quả sau.

Hệ quả 2.2. *Cho (X,d) là không gian b-mêtric và $f,T:X\to X$ là các ánh xạ từ X vào chính nó thỏa mãn $f(X)\subseteq T(X)$ và $g(X)\subseteq S(X)$ sao cho với mọi $x,y\in X$, ta có*

$$\psi(sd(fx,fy))\le F(\psi(M_s(x,y)),\varphi(M_s(x,y))),$$

trong đó

$$M_s(x,y) \quad = \max\left\{d(Tx,Ty), d(fx,Tx), d(fy,Ty), \frac{d(fx,Ty)+d(Tx,fy)}{2s}\right\}.$$

Giả sử rằng cặp ánh xạ (f,T) thỏa mãn tính chất (E.A) và $T(X)$ đóng trong X. Khi đó, cặp ánh xạ (f,T) có một điểm trùng nhau trong X. Hơn nữa, nếu cặp ánh xạ (f,T) tương thích yếu, thì f và T có một điểm bất động chung duy nhất.

Hệ quả 2.3. *Cho (X,d) là không gian b-mêtric và $f,g,S,T : X \to X$ là các ánh xạ từ X vào chính nó, với $f(X) \subseteq T(X)$, $g(X) \subseteq S(X)$ và với mọi $x,y \in X$ điều kiện sau được thỏa mãn*

$$sd(fx,gy) \leq F(M_s(x,y), \varphi(M_s(x,y))),$$

trong đó

$$M_s(x,y) \quad = \max\left\{d(Sx,Ty), d(fx,Sx), d(gy,Ty), \frac{d(fx,Ty)+d(Sx,gy)}{2s}\right\}.$$

Giả sử rằng các cặp ánh xạ (f,S) và (g,T) thỏa mãn tính chất (E.A) và một trong các không gian con $f(X)$, $g(X)$, $S(X)$ và $T(X)$ là đóng trong X. Khi đó, các cặp ánh xạ (f,S) và (g,T) có một điểm trùng nhau trong X. Hơn nữa, nếu các cặp ánh xạ (f,S) và (g,T) là tương thích yếu, thì f,g,S và T có một điểm bất động chung duy nhất.

Bằng cách lấy các hàm $\psi \in \Psi$ và $\varphi \in \Phi$ được xác định bởi $\psi(t) = \varphi(t) = t$ với mọi $t \in [0,\infty)$ và hàm C-lớp F cho bởi $F(s,t) = s - t$ với mọi $s,t \in [0,\infty)$, khi đó nhờ Định lý 2.1 ta thu được kết quả sau đây.

Hệ quả 2.4. (Theorem 2.1 [8]) *Cho (X,d) là không gian b-mêtric và $f,g,S,T : X \to X$ là các ánh xạ từ X vào chính nó, thỏa mãn $f(X) \subseteq T(X)$ và $g(X) \subseteq S(X)$ sao cho với mọi $x,y \in X$, ta có*

$$\psi\left(s^2 d(fx,gy)\right) \leq \psi(M_s(x,y)) - \varphi(M_s(x,y)), \tag{9}$$

trong đó ψ, $\varphi \in \Psi$ và

$$M_s(x,y) \quad = \max\left\{d(Sx,Ty), d(fx,Sx), d(gy,Ty), \frac{d(fx,Ty)+d(Sx,gy)}{2s}\right\}.$$

Giả sử rằng một trong các cặp ánh xạ (f,S) và (g,T) thỏa mãn tính chất (E.A) và một trong các không gian con $f(X), g(X), S(X)$ và $T(X)$ là đóng trong X. Khi đó, các cặp ánh xạ (f,S) và (g,T) có một giá trị trùng nhau trong X. Hơn nữa, nếu các cặp ánh xạ (f,S) và (g,T) là tương thích yếu, thì f,g,S,T có một điểm bất động chung duy nhất.

Bằng cách lấy các hàm $\psi \in \Psi$ và $\varphi \in \Phi$ được xác định bởi $\psi(t) = \varphi(t) = t$ với mọi $t \in [0,\infty)$ và hàm C-lớp F cho bởi $F(s,t) = s$ với mọi $s,t \in [0,\infty)$, khi đó nhờ Định lý 2.1 ta thu được kết quả sau đây.

Hệ quả 2.5. (Theorem 10 [7]) *Cho* (X,d) *là không gian b-mêtric với hệ số* $s>1$ *và* $f,g,S,T:X\to X$ *là các ánh xạ từ* X *vào chính nó thỏa mãn* $f(X)\subseteq T(X)$ *và* $g(X)\subseteq S(X)$ *sao cho với mọi* $x,y\in X$, *ta có*

$$s^{\varepsilon}d(fx,gy)\le M_s(x,y), \tag{10}$$

với hằng số $\varepsilon>1$ *và*

$$M_s(x,y)\ =\max\left\{d(Sx,Ty),d(fx,Sx),d(gy,Ty),\frac{d(fx,Ty)+d(Sx,gy)}{2s}\right\}.$$

Giả sử rằng một trong các cặp (f,S) *và* (g,T) *thỏa mãn tính chất (E.A) và một trong các không gian con* $f(X),g(X),S(X)$ *và* $T(X)$ *là tập con đóng trong* X. *Khi đó, các cặp ánh xạ* (f,S) *và* (g,T) *có một giá trị trùng nhau trong* X. *Hơn nữa, nếu các cặp ánh xạ* (f,S) *và* (g,T) *là tương thích yếu, thì* f,g,S,T *có một điểm bất động chung duy nhất.*

Ví dụ. Cho $X=[0,1]$, $F(s,t)=\dfrac{99}{100}s$ với mọi $s,t\in[0,\infty)$ và hàm $d:X\times X\to[0,\infty)$ được xác định như sau

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{nếu } x=y;\\ (x+y)^2 & \text{nếu } x\neq y.\end{cases}$$

Khi đó (X,d) là không gian b-mêtric với hệ số $s=2$. Xét các ánh xạ $f,g,S,T:X\to X$ từ X vào chính nó được xác định như sau

$$f(x)=\frac{x}{4},\qquad g(x)=\begin{cases}0 & \text{nếu } x\neq\frac{1}{2};\\ \frac{1}{8} & \text{nếu } x=\frac{1}{2},\end{cases}$$

và

$$S(x)=\begin{cases}2x & \text{nếu } 0\le x\le\frac{1}{2};\\ \frac{1}{8} & \text{nếu } \frac{1}{2}<x\le 1,\end{cases}\qquad T(x)=\begin{cases}x & \text{nếu } 0\le x<\frac{1}{2};\\ \frac{1}{2} & \text{nếu } \frac{1}{2}\le x\le 1,\end{cases}$$

với mọi $x\in X$.

Dễ thấy rằng F là hàm C-lớp, $f(X)$ đóng và $f(X)\subseteq T(X),g(X)\subseteq S(X)$. Lấy dãy $\{x_n\}\subset X$, với $x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}$ với mọi $n\ge 1$. Khi đó, ta có $\lim\limits_{n\to\infty}fx_n=\lim\limits_{n\to\infty}Sx_n=\dfrac{1}{8}$. Do đó cặp ánh xạ (f,S) thỏa mãn tính chất (E.A) nhưng chúng không tương thích với nhau, vì $\lim\limits_{n\to\infty}d(fSx_n,Sfx_n)\neq 0$.

Bằng cách lấy các hàm thay đổi khoảng cách $\psi,\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ được xác định bởi $\psi(t)=\sqrt{t}$, $\varphi(t)=t$ với mọi $t\in[0,\infty)$. Khi đó, ta dễ dàng kiểm tra điều kiện co (1), được thỏa mãn với mọi $x,y\in X$.

(i) Nếu $x=0,y=\dfrac{1}{2}$, thì $fx=0$, $gy=\dfrac{1}{8}$. Khi đó, ta có $d(fx,gy)=\left(\dfrac{1}{8}\right)^2$. Do đó

$$\psi\big(2d(fx,gy)\big) = \frac{\sqrt{2}}{8} \le \frac{99}{100}.\frac{1}{2} = \frac{99}{100}\psi\big(d(Sx,Ty)\big) \le \frac{99}{100}\psi\big(M_s(x,y)\big)$$
$$= F\big(\psi\big(M_s(x,y)\big),\varphi\big(M_s(x,y)\big)\big).$$

(ii) Nếu $x = 0, y \neq \dfrac{1}{2}$, thì $fx = gy = 0$. Lúc đó, ta được $d(fx,gy) = 0$. Tương tự, nếu $x = y = \dfrac{1}{2}$, thì $fx = gy = \dfrac{1}{8}$ và ta cũng có $d(fx,gy) = 0$. Vì thế, trong cả 2 trường hợp này ta có

$$\psi\big(2d(fx,gy)\big) = 0 \le F\big(\psi\big(M_s(x,y)\big),\varphi\big(M_s(x,y)\big)\big).$$

(iii) Nếu $x = \dfrac{1}{2}, y \neq \dfrac{1}{2}$, thì $fx = \dfrac{1}{8},\ gy = 0$. Khi đó $d(fx,gy) = \left(\dfrac{1}{8}\right)^2$. Do đó

$$\psi\big(2d(fx,gy)\big) = \frac{\sqrt{2}}{8} \le \frac{99}{100}.\left(\frac{1}{8}+1\right) = \frac{99}{100}\psi\big(d(fx,Sx)\big) \le \frac{99}{100}\psi\big(M_s(x,y)\big)$$
$$= F\big(\psi\big(M_s(x,y)\big),\varphi\big(M_s(x,y)\big)\big).$$

(iv) Nếu $x \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right), y = \dfrac{1}{2}$, thì $fx = \dfrac{x}{4},\ gy = \dfrac{1}{8}$. Lúc đó, ta có $d(fx,gy) = \left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{8}\right)^2$. Vì thế

$$\psi\big(2d(fx,gy)\big) = \sqrt{2}\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\right) \le \frac{99}{100}.\left(2x+\frac{1}{2}\right) = \frac{99}{100}\psi\big(d(Sx,Ty)\big)$$
$$\le \frac{99}{100}\psi\big(M_s(x,y)\big) = F\big(\psi\big(M_s(x,y)\big),\varphi\big(M_s(x,y)\big)\big).$$

(v) Nếu $x \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right), y \neq \dfrac{1}{2}$, thì $fx = \dfrac{x}{4},\ gy = 0$. Trường hợp này $d(fx,gy) = \left(\dfrac{x}{4}\right)^2$. Do đó

$$\psi\big(2d(fx,gy)\big) = \frac{\sqrt{2}x}{4} \le \frac{99}{100}.\frac{9x}{4} = \frac{99}{100}\psi\big(d(fx,Sx)\big)$$
$$\le \frac{99}{100}\psi\big(M_s(x,y)\big) = F\big(\psi\big(M_s(x,y)\big),\varphi\big(M_s(x,y)\big)\big).$$

(vi) Nếu $x \in \left(\dfrac{1}{2},1\right], y = \dfrac{1}{2}$, thì $fx = \dfrac{x}{4},\ gy = \dfrac{1}{8}$. Khi đó $d(fx,gy) = \left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{8}\right)^2$. Do đó

$$\psi\big(2d(fx,gy)\big) = \sqrt{2}\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\right) \le \frac{99}{100}.\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right) = \frac{99}{100}\psi\big(d(Sx,Ty)\big)$$
$$\le \frac{99}{100}\psi\big(M_s(x,y)\big) = F\big(\psi\big(M_s(x,y)\big),\varphi\big(M_s(x,y)\big)\big).$$

(vii) Nếu $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], y \neq \frac{1}{2}$, thì $fx = \frac{x}{4},\ gy = 0$. Lúc đó, ta có $d(fx, gy) = \left(\frac{x}{4}\right)^2$. Do đó

$$\psi\big(2d(fx,gy)\big) = \frac{\sqrt{2}x}{4} \leq \frac{99}{100}.\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{99}{100}\psi\big(d(fx,Sx)\big)$$
$$\leq \frac{99}{100}\psi\big(M_s(x,y)\big) = F\big(\psi\big(M_s(x,y)\big), \varphi\big(M_s(x,y)\big)\big).$$

Vì vậy, điều kiện (1) được thỏa mãn với mọi $x, y \in X$. Dễ thấy rằng các cặp ánh xạ (f, S) và (g, T) là tương thích yếu. Do đó, tất cả các điều kiện của Định lý 2.1 được thỏa mãn. Vì thế, f, g, S, T có một điểm bất động chung duy nhất. Hơn thế nữa, 0 chính là điểm bất động duy nhất của các ánh xạ f, g, S và T.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M. Aamri, D. El Moutawakil, *Some new common fixed point theorems under strict contractive conditions*, J. Math. Anal. Appl., **270**, 2002, 181-188.

[2] T. V. An, N. Dung, L. Q. Tuyen, *Stone-type theorem on b-metric spaces and applications*, Topology Appl., **185-186**, 2015, 50-64.

[3] A. H. Ansari, *Note on φ-ψ-contractive type mappings and related fixed point*, The 2nd Regional Conference on Mathematics and Applications PNU, 2014, 377-380.

[4] S. Czerwik, *Contraction mappings in b-metric spaces*, Acta Math Inform Univ Ostrav., *1* 1993, 5-11.

[5] M. S. Khan, M. Swaleh, S. Sessa, *Fixed point theorems by altering distances between the points*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, *30* (**1**), 1984, 1-9.

[6] V. Ozturk, A. H. Ansari, *Common fixed point theorems for mappings satisfying (E.A)-property via C-class functions in b-metric spaces*, Appl. Gener. Topol., **18**, 2017, 45-52.

[7] V. Ozturk, S. Radenovic, *Some remarks on b-(E.A)-property in b-metric spaces*, Springer Plus, **5: 544**, 2016, 10 pages, doi:10.1186/s40064-016-2163-z.

[8] V. Ozturk, D. Turkoglu, *Common fixed point for mappings satisfying (E.A)-property in b-metric spaces*, J. Nonlinear Sci. Appl., **8**, 2015, 1127 - 1133.

SUMMARY

COMMOM FIXED POINTS FOR CONTRACTIVE MAPPINGS SATISFYING (E.A)-PROPERTY VIA C-CLASS FUNCTIONS IN b-METRIC SPACES

In this paper, we prove a common fixed point theorem for contractive mappings satisfying (E.A)-property via C-class functions in b-metric spaces and give a illustration example. Then, we also show that the main results of Ozturk, Radenovic (*Some remarks on b-(E.A)-property in b-metric spaces*, Springer Plus, **5: 544** (2016)) and Ozturk, Turkoglu (*Common fixed point for mappings satisfying (E.A)-property in b-metric spaces*, J. Nonlinear Sci. Appl., **8** (2015), 1127 - 1133) are its corollaries.