

VỀ SỰ TỒN TẠI ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ T -TỰA CO KIỂU CIRIC TRONG KHÔNG GIAN S_b -MÊTRIC

Đình Huy Hoàng¹, Vũ Hải Quân² *

¹Trường Sư phạm, Trường Đại học Vinh, Việt Nam

²Trường Trung học cơ sở An Bình, Tây Ninh, Việt Nam

ARTICLE INFORMATION TÓM TẮT

Journal: Vinh University
Journal of Science
ISSN: 1859-2228

Volume: 52

Issue: 3A

***Correspondence:**
quan1982gv@gmail.com

Received: 30 January 2023

Accepted: 04 April 2023

Published: 20 June 2023

Citation:

Đình Huy Hoàng, Vũ Hải Quân
(2023). Về sự tồn tại điểm bất
động của ánh xạ T -tựa co kiểu
Ciric trong không gian S_b -mêtric.
Vinh Uni. J. Sci.
Vol. 52 (3A), pp. 5-17
doi: 10.56824/vujs.2023a004

OPEN ACCESS

Copyright © 2023. This is an
Open Access article distributed
under the terms of the Creative
Commons Attribution License
(CC BY NC), which permits non-
commercially to share (copy and
redistribute the material in any
medium) or adapt (remix,
transform, and build upon the
material), provided the original
work is properly cited.

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập sự tồn tại duy nhất điểm bất động của ánh xạ T -tựa co kiểu Ciric trong không gian S_b -mêtric đầy đủ. Kết quả của chúng tôi là mở rộng thực sự của một số kết quả trong các tài liệu của L. B. Ćirić (Proc. Amer. Math. Soc, 1971), S. Sedghi, N. Shobe, A. Aliouche (Math. Vesik, 2012), S. Sedghi, N. V. Dung (Math. Vesik, 2014).

Từ khóa: Điểm bất động; không gian S_b -mêtric; ánh xạ tựa co; ánh xạ T -tựa co.

1. Giới thiệu

Để mở rộng nguyên lý điểm bất động trong không gian mêtric đầy đủ của Banach, năm 1974 L. B. Ćirić [1] đã giới thiệu khái niệm ánh xạ tựa co và chứng minh sự tồn tại duy nhất điểm bất động của ánh xạ này trong không gian mêtric đầy đủ. Năm 2012, E. Karapinar và các cộng sự [2] đã mở rộng kết quả trên đây cho ánh xạ T -tựa co trong không gian mêtric. Để mở rộng các kết quả đã có về điểm bất động trong không gian mêtric, các nhà toán học đã xây dựng lớp các không gian rộng hơn lớp các không gian mêtric và chứng minh một số kết quả trong không gian mêtric vẫn đúng trong lớp các không gian vừa xây dựng được. Theo hướng này, S. Czerwik [3] đã giới thiệu khái niệm không gian b -mêtric vào năm 1993 và S. Sedghi cùng các cộng sự [4] đã giới thiệu không gian S -mêtric vào năm 2012. Mới đây, vào năm 2016, dựa vào các khái niệm không gian b -mêtric và S -mêtric, N. Sounayah và N. Mlaiki [5] đã định nghĩa không gian S_b -mêtric và chứng minh một định lý về điểm bất động trong không gian S_b -mêtric đầy đủ.

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ T -tựa co kiểu Ciric và chứng minh sự tồn tại duy nhất điểm bất động của nó trong không gian S_b -mêtric đầy đủ. Kết quả này là mở rộng thực sự của một số kết quả tương tự trong các tài liệu [1], [4], [6].

Đầu tiên, chúng ta nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản của không gian b -mêtric và không gian S_b -mêtric.

Định nghĩa 1.1. ([3]) Giả sử E là tập hợp khác rỗng. Hàm $d : E \times E \rightarrow [0, \infty)$ được gọi là b -mêtric trên E nếu tồn tại $s \geq 1$ sao cho với mọi $x, y, t \in E$ ta có:

- (i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $d(x, y) \leq s[d(x, t) + d(t, y)]$.

Tập E cùng với một b -mêtric trên nó được gọi là *không gian b -mêtric* với tham số s , nói gọn là *không gian b -mêtric* và được kí hiệu bởi (E, d) .

Nhận xét 1.2. Trong Định nghĩa 1.1, nếu $s = 1$ ta nhận được khái niệm không gian mêtric. Nói cách khác, không gian mêtric là trường hợp đặc biệt của không gian b -mêtric.

Định nghĩa 1.3. ([4]) Giả sử A là một tập khác rỗng. Hàm $S : A^3 \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là S -mêtric trên A nếu thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, y, z, t \in A$.

- (i) $S(x, y, z) \geq 0$;
- (ii) $S(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$;
- (iii) $S(x, y, z) \leq S(x, x, t) + S(y, y, t) + S(z, z, t)$.

Cặp (A, S) được gọi là *không gian S -mêtric*.

Bổ đề 1.4. ([4]) Giả sử A là không gian S -mêtric. Khi đó, ta có

$$S(x, x, y) = S(y, y, x), \text{ với mọi } x, y \in A.$$

Định nghĩa 1.5. ([7]) Giả sử X là tập khác rỗng và s là số thực, $s \geq 1$. Hàm $S_b : X^3 \rightarrow [0, \infty)$ được gọi là S_b -mêtric trên X nếu các điều kiện sau được thỏa mãn với mọi $x, y, z, t \in X$:

- (i) $S_b(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$;
- (ii) $S_b(x, y, z) \leq s[S_b(x, x, t) + S_b(y, y, t) + S_b(z, z, t)]$.

Khi đó, cặp (X, S_b) được gọi là *không gian S_b -mêtric* với tham số s nói gọn là *không gian S_b -mêtric*.

Không gian S_b -mêtric (X, S_b) được gọi là *đối xứng* nếu $S_b(x, x, y) = S_b(y, y, x), \forall x, y \in X$.

Nhận xét 1.6. Nếu (X, S_b) là không gian S_b -mêtric với tham số s thì từ Định nghĩa 1.5 suy ra

$$S_b(x, x, y) \leq sS_b(y, y, x), \quad \forall x, y \in X.$$

Ví dụ 1.7. Giả sử (X, d) là không gian b -mêtric với tham số $s \geq 1$. Ta dễ dàng chứng minh được, (X, S_b) là không gian S_b -mêtric đối xứng với tham số s , trong đó

$$S_b(x, y, z) = k[d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)], \quad \forall x, y, z \in X,$$

với k là hằng số dương cho trước.

Nhận xét 1.8. (i) Không gian S -mêtric là trường hợp đặc biệt của không gian S_b -mêtric với $s = 1$; (ii) Tồn tại những không gian S_b -mêtric mà không là không gian S -mêtric. Thật vậy, giả sử \mathbb{R} là không gian các số thực với mêtric thông thường. Ta xác định hàm $S_b : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ bởi công thức.

$$S_b(x, y, z) = |x - y|^2 + |y - z|^2 + |z - x|^2, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được (\mathbb{R}, S_b) là không gian S_b -mêtric với $s = 2$. Tuy nhiên (\mathbb{R}, S_b) không là không gian S -mêtric, bởi vì

$$18 = S_b(1, 1, -2) > 2S_b(1, 1, 0) + S_b(-2, -2, 0) = 12,$$

tức là hàm S_b không thỏa mãn điều kiện thứ 3 trong định nghĩa S -mêtric (Định nghĩa 1.3)

Từ đây về sau, nếu không có giải thích gì thêm thì ta luôn hiểu các không gian S_b -mêtric được nói tới là các không gian có tham số $s \geq 1$.

Định nghĩa 1.9. ([5]) Giả sử (X, S_b) là không gian S_b -mêtric và $\{x_n\}$ là dãy trong X .

a) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ tới* $x \in X$ khi $n \rightarrow \infty$ và được kí hiệu bởi $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ hoặc $x_n \rightarrow x$ khi $n \rightarrow \infty$ nếu $S_b(x_n, x_n, x) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$, tức là với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên n_ε sao cho $S_b(x_n, x_n, x) < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_\varepsilon$.

b) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu $S_b(x_n, x_n, x_m) \rightarrow 0$ khi n và $m \rightarrow \infty$. Tức là với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại số tự nhiên n_ε sao cho $S_b(x_n, x_n, x_m) < \varepsilon$ với mọi n và $m \geq n_\varepsilon$.

c) Không gian (X, S_b) được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy trong nó đều hội tụ.

Ta dễ dàng chứng minh được bổ đề sau đây.

Bổ đề 1.10. *Giả sử (X, S_b) là không gian S_b -mêtric. Khi đó, nếu $\{x_n\}$ là dãy hội tụ trong X thì $\{x_n\}$ là dãy Cauchy và nó chỉ hội tụ tới một điểm duy nhất.*

Định nghĩa 1.11. Giả sử (X, S_b) là không gian S_b -mêtric và $f : X \rightarrow X$.

a) Ánh xạ f được gọi là *hội tụ dãy* nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ trong X mà $\{f(x_n)\}$ hội tụ thì $\{x_n\}$ hội tụ.

b) Ánh xạ f được gọi là *liên tục tại* $x \in X$ nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ trong X mà $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

c) Ánh xạ f được gọi là *liên tục* nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc X .

d) S_b được gọi là *liên tục theo biến thứ ba* nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset X$, $x_n \rightarrow x \in X$ khi $n \rightarrow \infty$ thì $S_b(u, v, x_n) \rightarrow S_b(u, v, x)$ khi $n \rightarrow \infty$ với mọi $u, v \in X$.

2 Các kết quả chính

Giả sử (Y, S_b) là không gian S_b -mêtric, T và $g : Y \rightarrow Y$. Với mỗi $a \in Y$ đặt

$$O_T(g, a, m) = \{Tg^0a, Tga, Tg^2a, \dots, Tg^ma\}, m \in \mathbb{N}^*;$$

$$O_T(g, a, \infty) = \{Tg^0a, Tga, Tg^2a, \dots\},$$

trong đó $g^0a := a, g(a) := ga, g^m a = g(g^{m-1}a) := gg^{m-1}a, m = 1, 2, \dots$

Với mỗi tập con E trong Y ta ký hiệu

$$\delta(E) = \sup\{S_b(a, a, b) : a, b \in E\}.$$

Định nghĩa 2.1. Giả sử (Y, S_b) là không gian S_b -mêtric, T và $g : Y \rightarrow Y$. Ánh xạ g được gọi là *T-tựa co kiểu Ciric* nếu tồn tại $q \in [0, \frac{1}{s^2})$ sao cho

$$\begin{aligned} S_b(Tga, Tga, Tgb) &\leq q \max\{S_b(Ta, Ta, Tb), S_b(Ta, Ta, Tga), \\ &S_b(Tb, Tb, Tgb), S_b(Ta, Ta, Tgb), \\ &S_b(Tb, Tb, Tga)\}, \forall a, b \in Y. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Chú ý: Trong định nghĩa trên nếu T là ánh xạ đồng nhất trên Y , tức là $Tu = u$ với mọi $u \in Y$ thì ánh xạ g được gọi là *tựa co kiểu Ciric*. Như vậy, ánh xạ g được gọi là *tựa co kiểu Ciric* nếu

$$\begin{aligned} S_b(ga, ga, gb) &\leq q \max\{S_b(a, a, b), S_b(a, a, ga), \\ &S_b(b, b, gb), S_b(a, a, gb), S_b(b, b, ga)\}, \forall a, b \in Y. \end{aligned}$$

Định lý 2.2. Giả sử (Y, S_b) là không gian S_b -mêtric đối xứng và $T : Y \rightarrow Y$ là ánh xạ liên tục, đơn ánh và hội tụ dãy. Khi đó, nếu $g : Y \rightarrow Y$ là ánh xạ T -tựa co kiểu Ciric sao cho mọi dãy Cauchy có dạng $\{Tg^m a\}$ với mọi $a \in Y$ đều hội tụ trong Y thì:

a)

$$S_b(Tg^i a, Tg^i a, Tg^k a) \leq q\delta(O_T(g, a, m)), \quad (2.2)$$

với mọi $i, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, mọi $a \in Y$ và $m \in \mathbb{N}^*$;

b)

$$\delta(O_T(g, a, \infty)) \leq \frac{2s}{1-sq} S_b(Ta, Ta, Tga), \forall a \in Y; \quad (2.3)$$

c) g có duy nhất một điểm bất động $u \in Y$ và $u = \lim_{m \rightarrow \infty} g^m a_0, \forall a_0 \in Y$;

d) g liên tục tại điểm bất động u ;

e) Nếu thêm giả thiết S_b liên tục theo biến thứ ba thì với mọi $a_0 \in X$ và mọi $m = 1, 2, \dots$ ta có

$$S_b(Tg^m a_0, Tg^m a_0, Tu) \leq \frac{2sq^m}{1-sq} S_b(Ta_0, Ta_0, Tga_0).$$

Chứng minh. a) Với mỗi số tự nhiên $m \geq 1$, với mỗi i và $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ và với mỗi $a \in Y$ ta có $Tg^i a, Tg^{i-1} a, Tg^k a, Tg^{k-1} a \in O_T(g, a, m)$. Do đó sử dụng điều kiện (2.1) ta có

$$\begin{aligned} S_b(Tg^i a, Tg^i a, Tg^k a) &= S_b(Tg(g^{i-1} a), Tg(g^{i-1} a), Tg(g^{k-1} a)) \\ &\leq q \max\{S_b(Tg^{i-1} a, Tg^{i-1} a, Tg^{k-1} a), \\ &\quad S_b(Tg^{i-1} a, Tg^{i-1} a, Tg^i a), S_b(Tg^{k-1} a, Tg^{k-1} a, Tg^k a), \\ &\quad S_b(Tg^{i-1} a, Tg^{i-1} a, Tg^k a), S_b(Tg^{k-1} a, Tg^{k-1} a, Tg^i a)\} \\ &\leq q\delta(O_T(g, a, m)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

b) Ta có $O_T(g, a, 1) \subset O_T(g, a, 2) \subset \dots$. Do đó $\delta(O_T(g, a, 1)) \leq \delta(O_T(g, a, 2)) \leq \dots$. Từ đây suy ra $\delta(O_T(g, a, \infty)) = \sup\{\delta(O_T(g, a, m)) : m = 1, 2, \dots\}$. Do đó, để chứng minh khẳng định b) ta chỉ cần chứng tỏ

$$\delta(O_T(g, a, m)) \leq \frac{2s}{1-sq} S_b(Ta, Ta, Tga),$$

với mọi $a \in Y$ và mọi $m = 1, 2, \dots$. Thật vậy, vì $O_T(g, a, m)$ là tập hữu hạn và $Tg^i a, Tg^k a \in O_T(g, a, m)$ với mọi i và $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ nên từ bất đẳng thức (2.2) và $q \in [0, 1)$ suy ra tồn tại $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ sao cho

$$\delta(O_T(g, a, m)) = S_b(Ta, Ta, Tg^k a).$$

Do đó, sử dụng định nghĩa S_b -mêtric đối xứng và (2.2) ta có

$$\begin{aligned} S_b(Ta, Ta, Tg^k a) &\leq s[2S_b(Ta, Ta, Tga) + S_b(Tga, Tga, Tg^k a)] \\ &\leq s[2S_b(Ta, Ta, Tga) + q\delta(O_T(g, a, m))] \\ &= s[2S_b(Ta, Ta, Tga) + qS_b(Ta, Ta, Tg^k a)]. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\delta(O_T(g, a, m)) = S_b(Ta, Ta, Tg^k a) \leq \frac{2s}{1-sq} S_b(Ta, Ta, Tga).$$

c) Lấy $a_0 \in Y$. Ta xây dựng hai dãy $\{a_m\}$ và dãy $\{b_m\}$ trong Y bởi

$$a_{m+1} := ga_m, b_m := Ta_m = Tg^m a_0, \quad \forall m = 0, 1, \dots$$

Ta sẽ chứng minh $\{b_m\}$ là dãy Cauchy. Thật vậy, với mọi $m = 1, 2, \dots$ và mọi $p = 0, 1, \dots$ sử dụng (2.2) ta có

$$\begin{aligned} S_b(b_m, b_m, b_{m+p}) &= S_b(Tg^m a_0, Tg^m a_0, Tg^{m+p} a_0) \\ &= S_b(Tg(g^{m-1} a_0), Tg(g^{m-1} a_0), Tg^{p+1}(g^{m-1} a_0)) \\ &\leq q\delta(O_T(g, g^{m-1} a_0, p+1)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Tương tự như trong chứng minh b) ắt tồn tại $l \in \{1, 2, \dots, p+1\}$ sao cho

$$\delta(O_T(g, g^{m-1} a_0, p+1)) = S_b(Tg^{m-1} a_0, Tg^{m-1} a_0, Tg^l g^{m-1} a_0). \quad (2.5)$$

Tiếp tục sử dụng (2.2) ta có

$$\begin{aligned} S_b(Tg^{m-1} a_0, Tg^{m-1} a_0, Tg^l g^{m-1} a_0) \\ &= S_b(Tg(g^{m-2} a_0), Tg(g^{m-2} a_0), Tg^{l+1}(g^{m-2} a_0)) \\ &\leq q\delta(O_T(g, g^{m-2} a_0, l+1)) \leq q\delta(O_T(g, g^{m-2} a_0, p+2)). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Thay (2.5), (2.6) vào (2.4) ta được

$$S_b(b_m, b_m, b_{m+p}) \leq q\delta(O_T(g, g^{m-1} a_0, p+1)) \leq q^2\delta(O_T(g, g^{m-2} a_0, p+2)).$$

Tiếp tục lý luận tương tự ta có

$$\begin{aligned} S_b(b_m, b_m, b_{m+p}) &\leq q^m \delta(O_T(g, a_0, p+m)) \\ &\leq q^m \delta(O_T(g, a_0, \infty)) \leq q^m \frac{2s}{1-sq} S_b(Ta_0, Ta_0, Tga_0) \end{aligned} \quad (2.7)$$

với mọi $m = 1, 2, \dots$ và mọi $p = 0, 1, \dots$

Vì $q \in [0, \frac{1}{s})$ nên vế phải của (2.7) dần tới 0 khi $m \rightarrow \infty$. Từ đó suy ra $\{b_m\}$ là dãy Cauchy. Mặt khác, vì $\{b_m\} = \{Tg^m a_0\}$ nên theo giả thiết ắt tồn tại

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \lim_{m \rightarrow \infty} Tg^m a_0 = b \in Y.$$

Vì T là ánh xạ hội tụ dãy nên tồn tại

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g^m a_0 = u \in Y. \quad (2.8)$$

Kết hợp với tính liên tục của T ta có $\lim_{m \rightarrow \infty} Tg^m a_0 = Tu$. Theo Bổ đề 1.10 ta có $Tu = b$.

Tiếp theo, ta chứng tỏ u là điểm bất động của g . Ta có

$$\begin{aligned}
 S_b(Tu, Tu, Tgu) &\leq s[2S_b(Tu, Tu, Tg^{m+1}a_0) + S_b(Tgu, Tgu, Tg^{m+1}a_0)] \\
 &= s[2S_b(Tu, Tu, Tg^{m+1}a_0) + S_b(Tgu, Tgu, Tgg^m a_0)] \\
 &\leq s[2S_b(Tu, Tu, Tg^{m+1}a_0) + q \max\{S_b(Tu, Tu, Tg^m a_0), \\
 &S_b(Tu, Tu, Tgu), S_b(Tg^m a_0, Tg^m a_0, Tg^{m+1}a_0), \\
 &S_b(Tu, Tu, Tg^{m+1}a_0), S_b(Tg^m a_0, Tg^m a_0, Tgu)\}] \\
 &\leq 2sS_b(Tu, Tu, Tg^{m+1}a_0) \\
 &+ s^2q[2S_b(Tg^m a_0, Tg^m a_0, Tu) + S_b(Tu, Tu, Tgu) \\
 &+ S_b(Tg^m a_0, Tg^m a_0, Tg^{m+1}a_0) + S_b(Tu, Tu, Tg^{m+1}a_0)].
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Vì $Tg^m a_0 \rightarrow Tu$ khi $m \rightarrow \infty$ nên vế phải của (2.9) dần tới $s^2qS_b(Tu, Tu, Tgu)$. Do đó, cho $m \rightarrow \infty$, từ (2.9) suy ra $S_b(Tu, Tu, Tgu) \leq s^2qS_b(Tu, Tu, Tgu)$. Kết hợp với $q \in [0, \frac{1}{s^2})$ suy ra $S_b(Tu, Tu, Tgu) = 0$. Do đó $Tgu = Tu$. Vì T đơn ánh nên $gu = u$, tức u là điểm bất động của g .

Cuối cùng, ta chứng minh u là điểm bất động duy nhất của g . Giả sử $v \in Y$ cũng là điểm bất động của g , tức $gv = v$. Sử dụng (2.1) ta có

$$\begin{aligned}
 S_b(Tu, Tu, Tv) &= S_b(Tgu, Tgu, Tgv) \\
 &\leq q \max\{S_b(Tu, Tu, Tv), S_b(Tu, Tu, Tu), S_b(Tv, Tv, Tv), \\
 &S_b(Tu, Tu, Tv), S_b(Tv, Tv, Tu)\} = qS_b(Tu, Tu, Tv).
 \end{aligned}$$

Vì $q \in [0, 1)$ nên $S_b(Tu, Tu, Tv) = 0$, tức $Tu = Tv$. Do T đơn ánh nên $u = v$. Vậy điểm bất động của g là duy nhất.

Khẳng định thứ hai trong c) được suy ra từ (2.8).

d) Giả sử $\{a_m\}$ là một dãy trong Y , $a_m \rightarrow u$ khi $m \rightarrow \infty$. Để chứng minh g liên tục tại điểm bất động u ta cần chứng tỏ $ga_m \rightarrow gu$ khi $m \rightarrow \infty$. Vì u là điểm bất động của g nên $gu = u$. Do T liên tục và $a_m \rightarrow u$ nên $Ta_m \rightarrow Tu$, tức $S_b(Ta_m, Ta_m, Tu) \rightarrow 0$ khi $m \rightarrow \infty$. Theo điều kiện (2.1) với mọi $m = 1, 2, \dots$ ta có

$$\begin{aligned}
 S_b(Tu, Tu, Tga_m) &= S_b(Tgu, Tgu, Tga_m) \\
 &\leq q \max\{S_b(Tu, Tu, Ta_m), S_b(Tu, Tu, Tu), \\
 &S_b(Ta_m, Ta_m, Tga_m), S_b(Tu, Tu, Tga_m), S_b(Ta_m, Ta_m, Tu)\} \\
 &\leq sq[2S_b(Ta_m, Ta_m, Tu) + S_b(Tu, Tu, Tga_m)].
 \end{aligned}$$

Vì $S_b(Ta_m, Ta_m, Tu) \rightarrow 0$ khi $m \rightarrow \infty$ nên trong bất đẳng thức trên cho $m \rightarrow \infty$ ta có

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} S_b(Tu, Tu, Tga_m) \leq sq \limsup_{m \rightarrow \infty} S_b(Tu, Tu, Tga_m).$$

Vì $0 \leq q < \frac{1}{s}$ nên $\limsup_{m \rightarrow \infty} S_b(Tu, Tu, Tga_m) = 0$. Mặt khác, vì $S_b(Tu, Tu, Tga_m) \geq 0$ với mọi m nên

$$0 \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} S_b(Tu, Tu, Tga_m) \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} S_b(Tu, Tu, Tga_m) = 0.$$

Từ đây suy ra $\lim_{m \rightarrow \infty} S_b(Tu, Tu, Tga_m) = 0$. Do đó ta có $\lim_{m \rightarrow \infty} Tga_m = Tu$.

Vì T là ánh xạ hội tụ dãy nên $ga_m \rightarrow b$. Kết hợp với tính liên tục của T ta có $Tga_m \rightarrow Tb$. Sử dụng Bổ đề 1.10 ta suy ra $Tb = Tu$. Do T là đơn ánh nên $u = b = \lim_{m \rightarrow \infty} ga_m$ tức là $ga_m \rightarrow u = gu$. Vậy g liên tục tại u .

e) Vì S_b liên tục theo biến thứ ba và $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = b = Tu$ nên trong bất đẳng thức (2.7) cho $p \rightarrow \infty$ ta được

$$S_b(b_m, b_m, Tu) \leq \frac{2sq^m}{1-sq} S_b(Ta_0, Ta_0, Tga_0),$$

tức là

$$S_b(Tg^m a_0, Tg^m a_0, Tu) \leq \frac{2sq^m}{1-sq} S_b(Ta_0, Ta_0, Tga_0), \quad \forall m.$$

□

Sau đây là một số hệ quả của Định lý 2.2.

Hệ quả 2.3. Giả sử (Y, S_b) là không gian S_b -mêtric đối xứng và $T : Y \rightarrow Y$ là ánh xạ liên tục, đơn ánh và hội tụ dãy. Khi đó, nếu $g : Y \rightarrow Y$ là ánh xạ sao cho tồn tại $q \in [0, 1)$ thoả mãn

$$S_b(Tga, Tga, Tgb) \leq q S_b(Ta, Ta, Tb), \quad \forall a, b \in Y \quad (2.10)$$

và mọi dãy Cauchy có dạng $\{Tg^m a\}$ đều hội tụ trong Y với mọi $a \in Y$ thì:

a) g có duy nhất một điểm bất động $u \in Y$ và với mỗi $a_0 \in Y$ ta có

$$u = \lim_{m \rightarrow \infty} g^{m m_0} a_0;$$

b) Nếu thêm giả thiết S_b liên tục theo biến thứ ba thì với mọi $a_0 \in Y$ và với mọi $m = 1, 2, \dots$ ta có

$$S_b(Tg^{m m_0} a_0, Tg^{m m_0} a_0, Tu) \leq \frac{2sq^m}{1-sq} S_b(Ta_0, Ta_0, Tg^{m_0} a_0),$$

trong đó m_0 là một số tự nhiên sao cho $q^{m_0} \leq \frac{1}{s^2}$.

Chứng minh. Đầu tiên, ta giả sử $q \leq \frac{1}{s^2}$. Khi đó, từ

$$q S_b(Ta, Ta, Tb) \leq q \max\{S_b(Ta, Ta, Tb), S_b(Ta, Ta, Tga), S_b(Tb, Tb, Tgb), S_b(Ta, Ta, Tgb), S_b(Tb, Tb, Tga)\},$$

với mọi $a, b \in Y$ suy ra các khẳng định cần chứng minh được suy ra từ Định lý 2.2 (với $m_0 = 1$).

Bây giờ, ta giả sử $q \in [0, 1)$. Khi đó, tồn tại số tự nhiên m_0 sao cho $q^{m_0} < \frac{1}{s^2}$. Đặt $h = g^{m_0}$. Với mọi $a, b \in Y$ theo (2.10) ta có

$$\begin{aligned} S_b(Tha, Tha, Thb) &= S_b(Tg^{m_0} a, Tg^{m_0} a, Tg^{m_0} b) \\ &= S_b(Tg(g^{m_0-1} a), Tg(g^{m_0-1} a), Tg(g^{m_0-1} b)) \\ &\leq q S_b(Tg^{m_0-1} a, Tg^{m_0-1} a, Tg^{m_0-1} b) \\ &\leq q^2 S_b(Tg^{m_0-2} a, Tg^{m_0-2} a, Tg^{m_0-2} b) \\ &\leq \dots \leq q^{m_0} S_b(Ta, Ta, Tb). \end{aligned}$$

Vì $q^{m_0} < \frac{1}{s^2}$ nên theo chứng minh đầu tiên thì h có duy nhất một điểm bất động $u \in Y$ và với mọi $a_0 \in Y$ ta có

$$u = \lim_{m \rightarrow \infty} h^m a_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} g^{mm_0} a_0. \quad (2.11)$$

Hơn nữa, nếu thêm giả thiết S_b liên tục theo biến thứ ba thì với mọi $a_0 \in Y$ ta có

$$S_b(Th^m a_0, Th^m a_0, Tu) \leq \frac{2sq^{mm_0}}{1 - sq^{m_0}} S_b(Ta_0, Ta_0, Tha_0), \forall m = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Vì $h = g^{m_0}$ và u là điểm bất động của h nên $gu = gh u = g^{m_0+1} u = g^{m_0} g u = h(gu)$. Như vậy gu cũng là điểm bất động của h . Vì điểm bất động của h là duy nhất nên $gu = u$. Do đó u là điểm bất động của g . Từ (2.10) dễ dàng kiểm tra được điểm bất động u của g là duy nhất. Mặt khác, ta có $h^m a_0 = g^{mm_0} a_0, \forall a \in Y, \forall m = 1, 2, \dots$. Do đó, khẳng định b) được suy ra từ (2.12). \square

Hệ quả 2.4. ([4]) Giả sử (Y, S) là không gian S -mêtric đầy đủ và $g : Y \rightarrow Y$ là ánh xạ co, tức là tồn tại hằng số $q \in [0, 1)$ sao cho

$$S(ga, ga, gb) \leq qS(a, a, b), \quad \forall a, b \in Y.$$

Khi đó, g có điểm bất động duy nhất $u \in Y$. Hơn nữa, với bất kỳ $a_0 \in Y$ ta có $\lim_{m \rightarrow \infty} g^m(a_0) = u$ và

$$S(g^m a_0, g^m a_0, u) \leq \frac{2q^m}{1 - q} S(a_0, a_0, ga_0).$$

Chứng minh. Vì không gian S -mêtric là không gian S_b -mêtric đối xứng với $s = 1$. Hơn nữa, khi $s = 1$ thì S_b liên tục theo biến thứ ba nên hệ quả này là trường hợp đặc biệt của Hệ quả 2.3 khi lấy $T : Y \rightarrow Y$ là ánh xạ đồng nhất (tức $Ta = a$ với mọi $a \in Y$), $s = 1$ và $m_0 = 1$. \square

Ta dễ dàng kiểm tra được hai hệ quả sau đây là trường hợp riêng của Định lí 2.2 khi lấy $s = 1$ và $T : Y \rightarrow Y$ là ánh xạ đồng nhất.

Hệ quả 2.5. ([6]) Cho $g : Y \rightarrow Y$ là một tự ánh xạ trên không gian S -mêtric đầy đủ (Y, S) và thoả mãn điều kiện

$$S(ga, ga, gb) \leq q \max\{S(ga, ga, a), S(gb, gb, b)\},$$

với $q \in [0, 1)$ nào đó và với mọi $a, b \in Y$. Khi đó, g có một điểm bất động duy nhất trong Y . Hơn nữa, nếu $q \in [0, \frac{1}{2})$ thì g liên tục tại điểm bất động.

Hệ quả 2.6. ([6]) Cho $g : Y \rightarrow Y$ là một tự ánh xạ trên không gian S -mêtric đầy đủ (Y, S) và thoả mãn điều kiện

$$S(ga, ga, gb) \leq q \max\{S(a, a, b), S(ga, ga, a), \\ S(ga, ga, b), S(gb, gb, a), S(gb, gb, b)\},$$

với $q \in [0, \frac{1}{3})$ nào đó và với mọi $a, b \in Y$. Khi đó, g có một điểm bất động duy nhất trong Y . Hơn nữa, g liên tục tại điểm bất động.

Hệ quả 2.7. Giả sử (Y, S_b) là không gian S_b -mêtric đối xứng và đầy đủ, $T : Y \rightarrow Y$ là ánh xạ liên tục, đơn ánh, hội tụ dãy. Khi đó, nếu $g : Y \rightarrow Y$ là ánh xạ sao cho tồn tại các hằng số không âm $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ thoả mãn

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5 < \frac{1}{s^2},$$

và

$$\begin{aligned} S_b(Tga, Tga, Tgb) &\leq \alpha_1 S_b(Ta, Ta, Tb) + \alpha_2 S_b(Ta, Ta, Tga) \\ &+ \alpha_3 S_b(Tb, Tb, Tgb) + \alpha_4 S_b(Ta, Ta, Tgb) \\ &+ \alpha_5 S_b(Tb, Tb, Tga), \end{aligned} \quad (2.13)$$

với mọi $a, b \in Y$ thì:

- g có duy nhất một điểm bất động $u \in Y$;
- với mọi $a \in Y$ ta có $u = \lim_{m \rightarrow \infty} g^m a$;
- g liên tục tại điểm bất động u .

Chứng minh. Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5 := q < \frac{1}{s^2}$ nên với mọi $a, b \in Y$ ta có

$$\begin{aligned} &\alpha_1 S_b(Ta, Ta, Tb) + \alpha_2 S_b(Ta, Ta, Tga) + \alpha_3 S_b(Tb, Tb, Tgb) \\ &+ \alpha_4 S_b(Ta, Ta, Tgb) + \alpha_5 S_b(Tb, Tb, Tga) \\ &\leq q \max\{S_b(Ta, Ta, Tb), S_b(Ta, Ta, Tga), \\ &S_b(Tb, Tb, Tgb), S_b(Ta, Ta, Tgb), S_b(Tb, Tb, Tga)\}. \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức này và (2.13) suy ra bất đẳng thức (2.1) được thoả mãn, tức g là ánh xạ T -tựa co kiểu Ciric. Mặt khác, (Y, S_b) là không gian đầy đủ nên tất cả các điều kiện của Định lí 2.2 được thoả mãn. Do đó, các khẳng định cần chứng minh được suy ra từ Định lí 2.2. \square

Chú ý. Trong Hệ quả 2.7 có thể thay điều kiện “đầy đủ” của không gian (Y, S_b) bởi điều kiện “mọi dãy Cauchy có dạng $\{Tg^m a\}$ đều hội tụ”.

Tương tự như đối với các Hệ quả 2.5, 2.6 ta dễ dàng kiểm tra được các hệ quả sau đây là các trường hợp riêng của Hệ quả 2.7. Khi lấy $T : Y \rightarrow Y$ là ánh xạ đồng nhất trên Y .

Hệ quả 2.8. ([6]) Cho $g : Y \rightarrow Y$ là một tự ánh xạ trên không gian S -mêtric đầy đủ (Y, S) và thoả mãn điều kiện

$$S(ga, ga, gb) \leq \alpha_1 S(a, a, b) + \alpha_2 S(ga, ga, a) + \alpha_3 S(gb, gb, b),$$

với $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 1$ nào đó và với mọi $a, b \in Y$. Khi đó, g có một điểm bất động duy nhất trong Y . Hơn nữa, nếu $\alpha_3 < \frac{1}{2}$ thì g liên tục tại điểm bất động.

Hệ quả 2.9. ([6]) Cho $g : Y \rightarrow Y$ là một tự ánh xạ trên không gian S -mêtric đầy đủ (Y, S) và thoả mãn điều kiện

$$S(ga, ga, gb) \leq \alpha [S(ga, ga, b) + S(gb, gb, a)],$$

với $\alpha \in [0, \frac{1}{3})$ nào đó và với mọi $a, b \in Y$. Khi đó, g có một điểm bất động duy nhất trong Y . Hơn nữa, g liên tục tại điểm bất động.

Hệ quả 2.10. ([6]) Cho $g : Y \rightarrow Y$ là một tự ánh xạ trên không gian S -mêtric đầy đủ (Y, S) và thoả mãn điều kiện

$S(ga, ga, gb) \leq \alpha_1 S(a, a, b) + \alpha_2 S(ga, ga, b) + \alpha_3 S(gb, gb, a)$,
 với $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 1, \alpha_1 + 3\alpha_3 < 1$ nào đó và với mọi $a, b \in Y$. Khi đó, g có một điểm bất động duy nhất trong Y . Hơn nữa, g liên tục tại điểm bất động.

Hệ quả 2.11. ([6]) Cho $g : Y \rightarrow Y$ là một tự ánh xạ trên không gian S -mêtric đầy đủ (Y, S) và thoả mãn điều kiện

$$S(ga, ga, gb) \leq \alpha_1 S(a, a, b) + \alpha_2 S(ga, ga, a) + \alpha_3 S(ga, ga, b) + \alpha_4 S(gb, gb, a) + \alpha_5 S(gb, gb, b),$$

với $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \geq 0$ thoả mãn $\max\{\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + 2\alpha_5\} < 1$ và với mọi $a, b \in Y$. Khi đó, g có một điểm bất động duy nhất trong Y . Hơn nữa, g liên tục tại điểm bất động.

Chú ý. Như đã nói ở trên, các Hệ quả 2.5, 2.6 và từ Hệ quả 2.8 đến Hệ quả 2.11 là các trường hợp đặc biệt của Định lý 2.2. Hơn nữa ta cũng thấy rằng các hệ số trong các điều kiện co của các hệ quả này thường cần các điều kiện chặt hơn các hệ số tương ứng trong Định lý 2.2 và Hệ quả 2.7 của chúng tôi.

Hệ quả 2.12. ([2]) Giả sử (Y, d) là không gian mêtric, T và $g : Y \rightarrow Y$ là hai ánh xạ thoả mãn các điều kiện:

- 1) T là đơn ánh, liên tục và hội tụ dãy;
- 2) Mọi dãy Cauchy có dạng $\{Tg^m a\}$ đều hội tụ trong Y với mọi $a \in Y$;
- 3) Tồn tại $q \in [0, 1)$ sao cho

$$d(Tga, Tgb) \leq q \max\{d(Ta, Tb), d(Ta, Tga), d(Tb, Tgb), d(Ta, Tgb), d(Tb, Tga)\}, \forall a, b \in Y.$$

Khi đó,

- (i) g có điểm bất động duy nhất $u \in Y$;
- (ii) $\lim_{m \rightarrow \infty} Tg^m a = Tu$ với mọi $a \in Y$.

Chứng minh. Ta xác định hàm $S : Y \times Y \times Y \rightarrow [0, \infty)$ bởi công thức

$$S(a, b, c) = d(a, b) + d(b, c) + d(c, a), \quad \forall a, b, c \in Y.$$

Theo Ví dụ 1.7 thì S là S -mêtric đối xứng trên Y và ta có

$$S(a, a, b) = 2d(a, b), \quad \forall a, b \in Y.$$

Từ đây suy ra mỗi dãy Cauchy trong (Y, S) cũng là dãy Cauchy trong (Y, d) và mỗi dãy hội tụ trong (Y, d) cũng hội tụ trong (Y, S) . Do đó mỗi dãy Cauchy trong (Y, S) có dạng $\{Tg^n a\}$ đều hội tụ trong (Y, S) với mọi $a \in Y$. Mặt khác, với mọi $a, b \in Y$ theo điều kiện của Hệ quả 2.12, ta có

$$\begin{aligned} S(Tga, Tga, Tgb) &= 2d(Tga, Tgb) \\ &\leq q \max\{2d(Ta, Tb), 2d(Ta, Tga), 2d(Tb, Tgb), \\ &2d(Ta, Tgb), 2d(Tb, Tga)\} \\ &= q \max\{S(Ta, Ta, Tb), S(Ta, Ta, Tga), S(Tb, Tb, Tgb), \\ &S(Ta, Ta, Tgb), S(Tb, Tb, Tga)\}. \end{aligned}$$

Như vậy g là ánh xạ T -tựa co kiểu Ciric và các điều kiện của Định lý 2.2 được thoả mãn với $s = 1$. Do đó từ các kết luận c) của Định lý 2.2 cùng tính liên tục của T ta có các kết luận (i) và (ii). \square

Trong Hệ quả 2.12, nếu lấy $T : Y \rightarrow Y$ là ánh xạ đồng nhất ($Ta = a$ với mọi $a \in Y$) thì ta nhận được hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.13. ([1], Định lý 1) *Giả sử (Y, d) là không gian mêtric và $g : Y \rightarrow Y$ là ánh xạ thoả mãn các điều kiện:*

- 1) Mọi dãy Cauchy trong Y có dạng $\{g^m a\}$ đều hội tụ với mọi $a \in Y$;
- 2) Tồn tại $q \in [0, 1)$ sao cho

$$d(ga, gb) \leq q \max\{d(a, b), d(a, ga), d(b, gb), d(a, gb), d(b, ga)\}, \quad \forall a, b \in Y.$$

Khi đó, g có duy nhất một điểm bất động u trong Y và $\lim_{m \rightarrow \infty} g^m a = u$ với mọi $a \in Y$.

Ví dụ sau đây cho thấy rằng, ngay cả trong trường hợp đặc biệt với (Y, S_b) là không gian S -mêtric (tức $s = 1$) thì Định lý 2.2 vẫn thực sự tổng quát hơn các kết quả trong [1], [4], [6].

Ví dụ 2.14. Cho $Y = \{1, 2, 3\}$ và $d : Y^2 \rightarrow [0, \infty)$ là hàm được xác định bởi

$$d(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } a = b \\ 3 & \text{nếu } (a, b) \in \{(1, 3), (3, 1)\} \\ 2 & \text{nếu } (a, b) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\} \end{cases}$$

Ta dễ dàng kiểm tra được (Y, d) là không gian mêtric đầy đủ. Do đó, theo Ví dụ 1.7 thì (Y, S) là không gian S_b -mêtric đối xứng với tham số $s = 1$, tức (Y, S) là không gian S -mêtric, ở đây

$$S(a, b, c) = d(a, b) + d(b, c) + d(c, a), \quad \forall a, b, c \in Y.$$

Hơn nữa, vì (Y, d) là không gian mêtric đầy đủ nên (Y, S) là không gian S -mêtric đầy đủ.

Ta xác định hai ánh xạ $g, T : Y \rightarrow Y$ với

$$T1 = 1, T2 = 3, T3 = 2, g1 = g3 = 1, g2 = 3.$$

Ta sẽ chứng minh rằng các Hệ quả 2.4, 2.5, 2.6, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 và 2.13 không áp dụng được cho g nhưng Định lý 2.2 áp dụng được cho T và g .

Chứng minh. Thật vậy, xét $(1, 2) \in Y^2$ ta có $S(g1, g1, g2) = S(1, 1, 3) = 6$. Mặt khác, với mọi $(a, b) \in Y^2$ ta có $S(a, a, b) \leq 6$. Do đó

$$q \max\{S(a, a, b), S(ga, ga, a), S(ga, ga, b), S(gb, gb, b), S(gb, gb, a)\} < 6,$$

với mọi $(a, b) \in Y^2$ và với mọi $q \in [0, 1)$. Từ đó suy ra ánh xạ g không thoả mãn các điều kiện co trong các Hệ quả 2.4, 2.5, 2.6, 2.8, 2.9 đối với cặp $(1, 2) \in Y^2$.

Tiếp theo, ta xét điều kiện co trong Hệ quả 2.10 cho ánh xạ g đối với cặp $(1, 2)$. Ta có

$$\begin{aligned} \alpha_1 S(1, 1, 2) + \alpha_2 S(g1, g1, 2) + \alpha_3 S(g2, g2, 1) &= 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 \\ &= 2[(\alpha_1 + 2\alpha_2) + (\alpha_1 + 3\alpha_3)] \leq 2[2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 + 3\alpha_3)] < 6 = S(g1, g1, g2). \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ ánh xạ g không thoả mãn điều kiện của Hệ quả 2.10. Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được ánh xạ g không thoả mãn điều kiện của Hệ quả 2.11 và Hệ quả 2.13 cho cặp $(1, 2) \in Y^2$.

Bây giờ, ta chứng tỏ hai ánh xạ T, g thỏa mãn Định lý 2.2. Rõ ràng T là đơn ánh, liên tục và hội tụ dãy. Lấy $q \in [\frac{2}{3}, 1)$. Ta có

$$\begin{aligned} S(Tg1, Tg1, Tg2) &= S(1, 1, 2) = 4 \leq q.6 \\ &= q \max\{S(T1, T1, T2), S(T1, T1, Tg1), S(T2, T2, Tg2), \\ &S(T1, T1, Tg2), S(T2, T2, Tg1)\}. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ T và g thỏa mãn điều kiện (2.1) trong Định nghĩa 2.1 đối với $(a, b) = (1, 2)$. Hoàn toàn tương tự ta kiểm tra được T và g thỏa mãn điều kiện (2.1) đối với mọi $(a, b) \in Y^2$. Như vậy g là ánh xạ T -tựa co kiểu Ciric. Do đó Định lý 2.2 áp dụng được cho T và g (với $s = 1$). \square

3 Kết luận

Dựa vào khái niệm ánh xạ tựa co Ciric trong không gian mêtric, chúng tôi định nghĩa ánh xạ T -tựa co kiểu Ciric và đưa ra được điều kiện đủ để cho ánh xạ T -tựa co kiểu Ciric trong không gian S_b -mêtric đối xứng có duy nhất một điểm bất động (Định lý 2.2). Từ Định lý 2.2 chúng tôi suy ra được mười một hệ quả, trong đó có chín hệ quả là các kết quả đã có trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [4], [6]. Ví dụ 2.14 đã chứng tỏ Định lý 2.2 là thực sự tổng quát hơn các kết quả trong các tài liệu tham khảo [1], [4] và [6].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] L. B. Ciric, "A generalization of banach priciples," *Proc. Amer. Math. Soc.*, no. 45, pp. 267–273, 1971.
- [2] E. Karapinar, K. P. Chi, and T. D. Thanh, "A generalization of Ciric quasi-contraction," *Abstract and Applied Analysis*, no. Article ID 518734, pp. 1–9, 2012, doi: 10.1155/2012/518734.
- [3] S. Czerwik, "Contraction mappings in b -metric spaces," *Acta Math. In-form. Univ. Ostrav*, no. 1, pp. 5–11, 1973.
- [4] S. Sedghi, N. Shobe, and A. Aliouche, "A generalization of fixed point theorems in S -metric spaces," *Math. Vesik*, vol. 64, no. 3, pp. 258–266, 2012.
- [5] N. Souayah and N. Mlaiki, "A fixed point theorem in S_b -metric spaces," *J. Math.Computer*, pp. 131–139, 2016.
- [6] S. Sedghi and N. V. Dung, "Fixed point theorems on S -metric spaces," *Math. Vesik*, vol. 66, no. 1, pp. 113–124, 2014.
- [7] Y. Rohen, T. Dosenovic, and S. Radenovic, "A fixed point theorems in S_b -metric spaces," *Filomat*, vol. 31, no. 11, pp. 3335–3346, 2017.

ABSTRACT

**ON EXISTENCE OF FIXED POINTS
FOR T -QUASI CONTRACTIVE MAPPINGS
OF CIRIC TYPE IN S_b METRIC SPACES**

Dinh Huy Hoang¹, Vu Hai Quan²,

¹ *School of Education, Vinh University, Vietnam*

² *An Binh secondary school, Tay Ninh, Vietnam*

Received on 30/01/2023, accepted for publication on 04/4/2023

In this paper, we examine the existence and uniqueness of fixed points for T -quasi contractive of Ciric type in S_b -metric spaces. These results are an extension and generalization of the results obtained in the works of L. B. Ciric (Proc. Amer. Math. Soc, 1971), S. Sedghi, N. Shobe, A. Aliouche (Math. Vesik, 2012), S. Sedghi, N. V. Dung (Math. Vesik, 2014).

Keywords: Fixed point; S_b -metric space; quasi contraction mapping; T -quasi contraction mapping.